Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2363

Soit P la fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ par $P(X) = -10X^3 - 23X^2 + 65X - 12$.

1. Vérifier que -4 est racine de P.

2. Justifier alors l'eXistence de trois réels a, b et c tels que, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $P(X) = (X+4)\left(aX^2 + bX + c\right)$, puis les déterminer.

3. Déduire des questions précédentes :

- **a.** La résolution de l'équation $P(X) = 0$;
- **b.** Une factorisation de $P(X)$ sous forme d'un produit de 3 fonctions affines ;
- **c.** La résolution de l'inéquation $P(X) \geq 0$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2363

1. On vérifie que $P(-4) = 0$, ce qui est le cas, puisque $P(-4) = -10 \times (-4)^3 - 23 \times (-4)^2 + 65 \times (-4) - 12 = -10 \times (-64) - 23 \times 16 - 260 - 12 = 640 - 368 - 272 = 0$.

2. Le nombre -4 étant racine du polynôme P, il est donc factorisable par le polynôme $(X+4)$, c'est à dire qu'il eXiste trois réels a, b et c tels que, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $P(X) = (X+4)\left(aX^2 + bX + c\right)$.
Pour déterminer les réels a, b, et c, on procède par eXemple par identification. Le développement de cette dernière eXpression de P donne :

$\forall X \in \mathbb{R}, \quad P(X) = aX^3 + (4a+b)X^2 + (4b+c)X + 4c$ que l'on identifie avec $P(X) = -10X^3 - 23X^2 + 65X - 12$

On obtient alors le système d'équation $\begin{cases} a = -10 \\ 4a + b = -23 \\ 4b + c = 65 \\ 4c = -12 \end{cases}$ dont les solutions sont $a = -10$, $c = -3$ et $b = 17$. Ainsi, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $P(X) = (X+4)\left(-10X^2 + 17X - 3\right)$.

3. **a.** Ainsi : $P(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X + 4 = 0 \\ \text{ou} \\ -10X^2 + 17X - 13 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X = -4 \\ \text{ou} \\ X = \dfrac{1}{5} \quad \text{ou} \quad X = \dfrac{3}{2} \end{cases}$. Les solutions de $P(X) = 0$ sont donc $\mathcal{S} = \left\{-4, \frac{1}{5}, \frac{3}{2}\right\}$.

b. Des solutions de $P(X) = 0$, on en déduit directement que, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $P(X) = (X+4)(5X-1)(2X-3)$.

c. Il suffit d'étudier le signe de la fonction affine $X \longmapsto X+4$ et du polynôme de degré 2 $X \longmapsto -10X^2 + 17X - 3$. La première est une fonction affine croissante qui s'annule en $X = -4$ et le second un polynôme de degré 2 dont le coefficient du terme de degré 2 est négatif, à discriminant positif et qui s'annule en $\frac{1}{5}$ et $\frac{3}{2}$. D'où le signe de $P(X)$:

X	$-\infty$		-4		$\frac{1}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $X+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $-10X^2+17X-3$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Signe de $P(X)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, les solutions de $P(X) \geq 0$ sont : $\left]-\infty ; -4\right] \cup \left[\frac{1}{5} ; \frac{3}{2}\right]$.

EX. 2 | Réf. 2653

On pose, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$:

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$$

1. Déterminer une primitive sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ de la fonction $f+g$.
2. Déterminer une primitive sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ de la fonction $f-g$.
3. En déduire alors les primitives de f et g sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.
4. Déterminer alors la primitive de f qui vaut 1 en 0.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2653

1. On a directement que : $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], \quad f(x)+g(x) = \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)} = 1$

   et par suite, une primitive de la fonction $f+g$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ est la fonction $\boxed{x \longmapsto x}$.

2. On a directement que : $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], \quad f(x)-g(x) = \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$

   On reconnaît alors un quotient de la forme $\frac{u'}{u}$ où $u : x \longmapsto \cos(x)+\sin(x)$ avec la fonction u qui est strictement positive sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$. Ainsi, une primitive de la fonction $f-g$ est la fonction $\boxed{x \longmapsto \ln(\cos(x)+\sin(x))}$.

3. En notant F et G deux primitives respectives de f et g sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, il vient donc que : $\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} F(x)+G(x) = x \\ F(x)-G(x) = \ln(\cos(x)+\sin(x)) \end{cases}$.

   Soit alors $x \in \mathbb{R}$. Il vient alors que : $\begin{cases} F(x)+G(x) = x \\ F(x)-G(x) = \ln(\cos(x)+\sin(x)) \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} F(x)+G(x) = x \\ -2G(x) = \ln(\cos(x)+\sin \end{cases}$

   $\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} F(x)+G(x) = x \\ G(x) = \frac{1}{2}(x - \ln(\cos(x) \end{cases}$

   $\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}(x + \ln(\cos(x) \\ G(x) = \frac{1}{2}(x - \ln(\cos(x) \end{cases}$

   Ainsi, on en déduit que : $\boxed{\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], \quad F(x) = \frac{1}{2}(x+\ln(\cos(x)+\sin(x)))}$ et : $\boxed{\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], \quad G(x) = \frac{1}{2}(x-\ln(\cos(x)+\sin(x)))}$

4. D'après les questions précédentes, la primitive $\mathbb{F}$ de f sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ est de la forme : $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], \quad \mathbb{F}(x) = \frac{1}{2}(x+\ln(\cos(x)+\sin(x))) + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

   On a ainsi que : $\mathbb{F}(0) = \frac{1}{2}(0+\ln(\cos(0)+\sin(0))) + C = C$

   et par suite, on en déduit que $C = 1$ et que la primitive cherchée est donnée par : $\boxed{\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], \quad \mathbb{F}(x) = \frac{1}{2}(x+\ln(\cos(x)+\sin(x))) + 1}$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2369

On se propose dans cet exercice d'expliciter les **schémas de Hörner** pour les calculs de valeurs ou sa factorisation d'un polynôme de degré 3. Dans tout ce qui suit :

- P est le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ où $(\alpha_0, \ldots, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$.
- a est un réel quelconque fixé.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ((\alpha_3 x + \alpha_2)\, x + \alpha_1)\, x + \alpha_0$.
Cette transformation d'écriture s'appelle le **schéma de Hörner** du polynôme P.

2. Soit A le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $A(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 5$.
Donner le **schéma de Hörner** de ce polynôme A.

3. On pose : $\begin{cases} h_3 = \alpha_3 \\ h_2 = \alpha_2 + a \times h_3 \\ h_1 = \alpha_1 + a \times h_2 \\ h_0 = \alpha_0 + a \times h_1 \end{cases}$.

a. Montrer que $P(a) = h_0$.

b. Qu'en déduit-on si $h_0 = 0$ pour le polynôme P ?

c. Expliciter pour le polynôme A précédent les valeurs de h_3, h_2, h_1 et h_0 lorsque $a = 5$ puis en déduire la valeur de $A(5)$ par cette méthode.

4. Dans cette question, on cherche le polynôme Q tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x - a) \times Q(x) + P(a)$.

a. On considère le polynôme G défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $G(x) = P(x) - P(a)$.
Justifier que G est factorisable par $(x - a)$.

b. En déduire alors que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad Q(x) = h_3 x^2 + h_2 x + h_1$

c. Expliciter alors le polynôme Q pour le polynôme A de la question précédente.

5. Le calcul des coefficients h_3, h_2, h_1 et h_0 peut s'illustrer avec le processus algorithmique suivant :

$$\begin{array}{cccc} \alpha_3 & \alpha_2 + a \times \boxed{\alpha_3} & \alpha_1 + a \times \boxed{h_2} & \alpha_0 + a \times \boxed{h_1} \\ \boxed{\alpha_3} & \boxed{h_2} & \boxed{h_1} & h_0 \end{array}$$

L'utiliser pour factoriser les deux polynômes suivants :

a. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) = 5x^3 - 11x^2 - 3x - 27$ sachant que 3 est racine de P_1 ;

b. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_2(x) = -x^3 + x^2 + 16x + 20$ sachant que 5 est racine de P_2.

Le schéma de Hörner et ces deux applications s'étendent à des polynômes de degré quelconque.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2369

1. Il suffit de développer l'expression proposée : $\forall x \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} ((\alpha_3 x + \alpha_2)\, x + \alpha_1)\, x + \alpha_0 &= \left(\alpha_3 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_1\right) x + \alpha_0 \\ &= \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 \\ &= P(x) \end{aligned}$$

2. On reprend directement le résultat de la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R},\quad A(x) = ((2x - 7)\, x + 4)\, x - 5$

3. a. En utilisant le schéma de Hörner de P, il vient :

$$\begin{aligned} P(a) &= ((\alpha_3 a + \alpha_2)\, a + \alpha_1)\, a + \alpha_0 \\ &\underset{\text{car } h_2 = \alpha_2 + a h_3}{=} (h_2 \times a + \alpha_1)\, a + \alpha_0 \\ &\underset{\text{car } h_1 = \alpha_1 + a h_2}{=} h_1 \times a + \alpha_0 \\ &\underset{\text{car } h_0 = \alpha_0 + a h_1}{=} h_0 \end{aligned}$$

b. Si $h_0 = 0$, alors $P(a) = 0$ et donc a est une racine de P, qui sera ainsi factorisable par $x - a$.

c. En appliquant directement ces relations, il vient pour le polynôme A : $\begin{cases} h_3 = 2 \\ h_2 = -7 + 5 \times 2 \text{ d'où } h_2 = 3 \\ h_1 = 4 + 5 \times 3 \text{ d'où } h_1 = 19 \\ h_0 = -5 + 5 \times 19 \text{ d'où } h_0 = 90 \end{cases}$

4. a. On a clairement que $G(a) = P(a) - P(a)$ c'est à dire $G(a) = 0$, donc a est une racine de G et par suite G est factorisable par $x - a$.

b. En utilisant le schéma de Hörner de P, il vient que :

$$\begin{array}{rcl} P(x)-P(a) & = & \left(\left(h_3x+(h_2-ah_3)\right)x+(h_1-ah_2)\right)x+h_0-ah_1-h_0 \\ & = & \left(\left(h_3(x-a)+h_2\right)x+h_1-ah_2\right)x-ah_1 \\ & = & \left(h_3(x-a)x+h_2(x-a)+h_1\right)x-ah_1 \\ & = & h_3x^2(x-a)+h_2x(x-a)+h_1(x-a) \\ & = & (x-a)\left(h_3x^2+h_2x+h_1\right) \end{array}$$

et on en déduit ainsi l'expression de Q.

c. On en déduit ainsi que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $A(x)=(x-5)\left(2x^2+3x+19\right)+90$

5. a. On applique le schéma de Hörner avec $a=3$;

$$\begin{array}{cccc} 5 & -11+3\times\boxed{5} & -3+3\times\boxed{4} & -27+3\times\boxed{9} \\ \boxed{5} & \boxed{4} & \boxed{9} & 0 \end{array}$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_1(x)=(x-3)\left(5x^2+4x+9\right)$ et comme le discriminant du polynôme $x \longmapsto 5x^2+4x+9$ est strictement négatif, on a la factorisation de P sur $\mathbb{R}$.

b. On applique le schéma de Hörner avec $a=5$;

$$\begin{array}{cccc} -1 & -1+5\times\boxed{(-1)} & 16+5\times\boxed{(-4)} & 20+5\times\boxed{(-4)} \\ \boxed{-1} & \boxed{-4} & \boxed{-4} & 0 \end{array}$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_2(x)=(x-3)\,(-x-2x-4)$ et comme on remarque que $x^2+2x+4=(x+2)^2$, on en déduit que $P_2(x)=-(x-3)(x+2)^2$.