Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2363

Soit P la fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ par $P(X) = -10X^3 - 23X^2 + 65X - 12$.

1. Vérifier que -4 est racine de P.
2. Justifier alors l'eXistence de trois réels a, b et c tels que, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $P(X) = (X+4)\left(aX^2 + bX + c\right)$, puis les déterminer.
3. Déduire des questions précédentes :
   a. La résolution de l'équation $P(X) = 0$;
   b. Une factorisation de $P(X)$ sous forme d'un produit de 3 fonctions affines ;
   c. La résolution de l'inéquation $P(X) \geq 0$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2363

1. On vérifie que $P(-4) = 0$, ce qui est le cas, puisque $P(-4) = -10 \times (-4)^3 - 23 \times (-4)^2 + 65 \times (-4) - 12 = -10 \times (-64) - 23 \times 16 - 260 - 12 = 640 - 368 - 272 = 0$.
2. Le nombre -4 étant racine du polynôme P, il est donc factorisable par le polynôme $(X+4)$, c'est à dire qu'il eXiste trois réels a, b et c tels que, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $P(X) = (X+4)\left(aX^2 + bX + c\right)$.
   Pour déterminer les réels a, b, et c, on procède par eXemple par identification. Le développement de cette dernière eXpression de P donne :
   $\forall X \in \mathbb{R}, \quad P(X) = aX^3 + (4a+b)X^2 + (4b+c)X + 4c$ que l'on identifie avec $P(X) = -10X^3 - 23X^2 + 65X - 12$
   On obtient alors le système d'équation $\begin{cases} a = -10 \\ 4a + b = -23 \\ 4b + c = 65 \\ 4c = -12 \end{cases}$ dont les solutions sont $a = -10$, $c = -3$ et $b = 17$. Ainsi, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $P(X) = (X+4)\left(-10X^2 + 17X - 3\right)$.
3. a. Ainsi : $P(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X + 4 = 0 \\ \text{ou} \\ -10X^2 + 17X - 13 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X = -4 \\ \text{ou} \\ X = \dfrac{1}{5} \quad \text{ou} \quad X = \dfrac{3}{2} \end{cases}$. Les solutions de $P(X) = 0$ sont donc $\mathcal{S} = \left\{-4, \dfrac{1}{5}, \dfrac{3}{2}\right\}$.
   b. Des solutions de $P(X) = 0$, on en déduit directement que, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $P(X) = (X+4)(5X-1)(2X-3)$.
   c. Il suffit d'étudier le signe de la fonction affine $X \longmapsto X+4$ et du polynôme de degré 2 $X \longmapsto -10X^2 + 17X - 3$. La première est une fonction affine croissante qui s'annule en $X = -4$ et le second un polynôme de degré 2 dont le coefficient du terme de degré 2 est négatif, à discriminant positif et qui s'annule en $\dfrac{1}{5}$ et $\dfrac{3}{2}$. D'où le signe de $P(X)$:

X	$-\infty$		-4		$\frac{1}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $X+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $-10X^2 + 17X - 3$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Signe de $P(X)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

   Ainsi, les solutions de $P(X) \geq 0$ sont : $\left]-\infty ; -4\right] \cup \left[\dfrac{1}{5} ; \dfrac{3}{2}\right]$.

EX. 2 | Réf. 2288

On se propose dans cet exercice de déterminer la primitive $\mathbb{F}$ qui s'annule en $x=0$ de la fonction :

$$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{x}\,(2\cos(x)+3\sin(x))$$

1. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On note $F : x \longmapsto a\mathrm{e}^{x}\cos(x)+b\mathrm{e}^{x}\sin(x)$.

a. Calculer $F'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b. Écrire un système d'équations d'inconnues les deux réels a et b pour que F puisse être une primitive f sur $\mathbb{R}$, puis le résoudre.

c. En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer alors la primitive $\mathbb{F}$ de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $x=0$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2288

1. a. Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= a\mathrm{e}^{x}\cos(x)) - a\mathrm{e}^{x}\sin(x) + b\mathrm{e}^{x}\sin(x) + b\mathrm{e}^{x}\cos(x)) \\ &= \mathrm{e}^{x}(a\cos(x)) - a\sin(x) + b\sin(x) + b\cos(x))) \\ &= \mathrm{e}^{x}\,((a+b)\cos(x) + (b-a)\sin(x)) \end{aligned}$$

b. En identifiant $F'(x)$ et $f(x)$, il vient le système $\left\{\begin{array}{l} a+b=2 \\ b-a=3 \end{array}\right.$ qui donne $a=-\dfrac{1}{2}$ et $b=\dfrac{5}{2}$.

c. Les primitives sur $\mathbb{R}$ de f sont les fonctions $x\longmapsto \mathrm{e}^{x}\left(-\dfrac{1}{2}\cos(x)+\dfrac{5}{2}\sin(x)\right)+C$ où C constante réelle.

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathbb{F}(x)=\mathrm{e}^{x}\left(-\dfrac{1}{2}\cos(x)+\dfrac{5}{2}\sin(x)\right)+C$. Or $\mathbb{F}(0)=-\dfrac{1}{2}+C$ et comme on veut $\mathbb{F}(0)=0$, il vient $C=\dfrac{1}{2}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2364

Soit $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{4}\dfrac{8x-5}{x^2-1} \end{array}\right.$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que : $\quad\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\quad f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-1}$.

2. En déduire les primitives de f sur les intervalles $I_1=]-\infty;-1[$, $I_2=]-1;1[$ et $I_3=]1;+\infty[$.

3. Déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I_3 qui s'annule en $x=2$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2364

1. En réduisant au même dénominateur, il vient : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\quad f(x) = \dfrac{a(x-1)+b(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{(a+b)x+(b-a)}{x^2-1}$. Ainsi, par identification des deux numérateurs, il vient les relations : $\left\{\begin{array}{l} a+b=2 \\ a-b=-\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$. Il s'agit d'un système linéaire 2×2 que l'on résoud par combinaison pour obtenir : $\left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{13}{8} \\ b=\dfrac{3}{8} \end{array}\right.$. Par suite, on en conclut que : $\quad\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\quad f(x)=\dfrac{13}{8(x+1)}+\dfrac{3}{8(x-1)}$.

2. • Sur l'intervalle $I_1=]-\infty;-1[$, la fonction $x\longmapsto x+1$ est négative, ainsi que la fonction $x\longmapsto x-1$.
Ainsi, en écrivant : $\quad\forall x\in]-\infty;-1[,\quad f(x)=\dfrac{13}{8}\dfrac{-1}{(-(x+1))}+\dfrac{3}{8}\dfrac{-1}{(-(x-1))}$, il vient que les primitives F_1

de f sur I_1 sont les fonctions de la forme : $\forall x \in \left]-\infty;-1\right[, \quad F_1(x) = \frac{13}{8}\ln(-x-1) + \frac{8}{5}\ln(-x+1)$

- Sur l'intervalle $I_2 = \left]-1;1\right[$, la fonction $x \longmapsto x+1$ est positive, alors que la fonction $x \longmapsto x-1$ est négative. Ainsi, en écrivant : $\forall x \in \left]-1;1\right[, \quad f(x) = \frac{13}{8}\frac{1}{x+1} + \frac{3}{8}\frac{-1}{(-(x-1))}$, il vient que les primitives F_1 de f sur I_1 sont les fonctions de la forme : $\forall x \in \left]-\infty;-1\right[, \quad F_1(x) = \frac{13}{8}\ln(x+1) + \frac{8}{5}\ln(-x+1)$
- Sur l'intervalle $I_3 = \left]1;+\infty\right[$, la fonction $x \longmapsto x+1$ est positive, ainsi que la fonction $x \longmapsto x-1$. Ainsi, il vient que les primitives F_1 de f sur I_1 sont les fonctions de la forme : $\forall x \in \left]-\infty;-1\right[, \quad F_1(x) = \frac{13}{8}\ln(x+1) + \frac{8}{5}\ln(x-1)$

3. La fonction F étant une primitive de f sur l'intervalle I_3, on sait qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \left]1;+\infty\right[, \quad F(x) = \frac{13}{8}\ln(x+1) + \frac{8}{5}\ln(x-1) + k$.

La condition $F(2) = 0$ se traduit par la relation : $\frac{13}{8}\ln(2+1) + \frac{8}{5}\ln(2-1) + k = 0$, c'est à dire $\frac{13}{8}\ln(2) + k = 0$, d'où $k = -\frac{13}{8}\ln(2)$, et par suite : $\forall x \in \left]1;+\infty\right[, \quad F(x) = \frac{13}{8}\ln(x+1) + \frac{8}{5}\ln(x-1) - \frac{13}{8}\ln(2)$.