Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5181

La fonction $f : x \longmapsto \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^3 + \left(1-\sqrt{1+x^2}\right)^3$ est-elle une fonction polynôme de degré 2 ? Si oui, justifier.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 5181

Les développements de $\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^3$ et $\left(1-\sqrt{1+x^2}\right)^3$ donnent :

$$\begin{array}{rcl} \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^3 & = & 1+3\sqrt{1+x^2}+3\left(1+x^2\right)^2+\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2} \\ & = & 4+4\sqrt{1+x^2}+3x^2+x^2\sqrt{1+x^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \left(1-\sqrt{1+x^2}\right)^3 & = & 1-3\sqrt{1+x^2}+3\left(1+x^2\right)^2-(1 \\ & = & 4-4\sqrt{1+x^2}+3x^2-x^2\sqrt{1+x^2} \end{array}$$

et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = 8+6x^2$ qui est bien l'expression d'un polynôme de degré 2.

EX. 2 | Réf. 2075

Le but de l'exercice consiste en l'étude du signe de l'expression $A(x) = (x+1)^4 - (2x-1)^4$ où $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, donner l'expression développée de $(x+1)^4$ et $(2x-1)^4$.
2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = -15x^4+36x^3-18x^2+12x$.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad A(x) = -3x(-2+x)\left(ax^2+bx+c\right)$
4. En déduire le signe de $A(x)$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2075

1. En développant directement, on obtient :

$$(x+1)^4 = x^4+4x^3+6x^2+4x+1 \qquad \text{et} \qquad (2x-1)^4 = 16x^4-32x^3+24x^2-8x+1$$

2. Il est alors immédiat que :

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & (x+1)^4-(2x-1)^4 \\ & = & x^4+4x^3+6x^2+4x+1-\left(16x^4-32x^3+24x^2-8x+1\right) \\ & = & x^4+4x^3+6x^2+4x+1-16x^4+32x^3-24x^2+8x-1 \\ & = & -15x^4+36x^3-18x^2+12x \end{array}$$

3. On procède par identification des coefficients en développant l'expression polynomiale $-3x(-2+x)\left(ax^2+bx+c\right)$ et en l'idenfiant à l'expression polynomiale $-15x^4+36x^3-18x^2+12x$.

$$\begin{array}{rcl} -3x(-2+x)\left(ax^2+bx+c\right) & = & -3x\left(-2ax^2-2bx-2c+ax^3+bx^2+cx\right) \\ & = & 6ax^3+6bx^2+6cc-3ax^4-3bx^3-3cx^2 \\ & = & -3ax^4+(6a-3b)x^2+(6b-3c)x^2+6cx \end{array}$$

Par identification des deux expressions polynomiales, on obtient donc le système : $\left\{\begin{array}{l} -3a=-15 \\ 6a-3b=36 \\ 6b-3c=-18 \\ 6c=12 \end{array}\right.$, ce qui conduit à $a=5$, $c=2$ et $b=-2$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad A(x) = -3x(-2+x)\left(5x^2-2x+2\right)$.

4. L'expression $A(x)$ est un produit. On étudie donc le signe de chacun des facteurs du produit, en remarquant que $x \longmapsto -3x$ et $x \longmapsto -2+x$ sont deux fonctions affines, l'une décroissante qui s'annule en 0, l'autre croissante qui s'annule en 2. Par ailleurs, $x \longmapsto 5x^2-2x+2$ est une fonction polynôme de degré 2 dont le discriminant $\Delta = (-2)^2-4\times5\times2 = -36 < 0$, donc n'admet pas de racines réelles et reste donc de signe constant sur $\mathbb{R}$, ici positif puisque le coefficient de son terme de degré 2 est positif. Ainsi :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $-3x$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $-2+x$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $5x^2-2x+2$		$+$		$+$		$+$	
Signe de $A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 5181

La fonction $f : x \longmapsto \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^3 + \left(1-\sqrt{1+x^2}\right)^3$ est-elle une fonction polynôme de degré 2 ? Si oui, justifier.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 5181

Les développements de $\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^3$ et $\left(1-\sqrt{1+x^2}\right)^3$ donnent :

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^3 &= 1+3\sqrt{1+x^2}+3\left(1+x^2\right)^2+\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}\\ &= 4+4\sqrt{1+x^2}+3x^2+x^2\sqrt{1+x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(1-\sqrt{1+x^2}\right)^3 &= 1-3\sqrt{1+x^2}+3\left(1+x^2\right)^2-(1\ \ldots\\ &= 4-4\sqrt{1+x^2}+3x^2-x^2\sqrt{1+x^2}\end{aligned}$$

et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = 8+6x^2$ qui est bien l'expression d'un polynôme de degré 2.