Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 1205

On considère la famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$ d'éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ où : $P_1 = X^2 + X - 1,\ P_2 = 2X,$ et $P_3 = X^2 + 1.$
Montrer que $\mathrm{Vect}\,(P_1, P_2, P_3) = \mathbb{R}_2[X]$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 1205

On note $F = \mathrm{Vect}\,(P_1, P_2, P_3)$.

- F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, donc on a $F \subset \mathbb{R}_2[X]$.
- On sait que F est engendré par la famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$.
  Par théorème, la dimension de F est égale au rang de la famille $\mathcal{F}$.
  Or en notant $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, le rang de la famille $\mathcal{F}$ est égal au rang de sa représentation matricielle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(\mathcal{F})$.
  On a tout d'abord : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
  Un échelonnement en lignes de cette matrice donne que : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ où cette dernière matrice est clairement de rang égal à 3.
  On en déduit donc que : $\mathrm{rg}\,(\mathcal{F}) = 3$.
  Par suite, F est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ lui même de dimension 3. Ainsi, par théorème $F = \mathbb{R}_2[X]$.

EX. 2 | Réf. 1864

On se propose dans cet exercice de résoudre sur $\mathbb{R}$ le système d'équations différentielles suivant :

$$(\star) : \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 4x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$ où les fonctions inconnues sont $x_1 : t \longmapsto x_1(t)$ et $x_2 : t \longmapsto x_2(t)$

avec comme conditions initiales : $\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = -1 \end{cases}$.

Pour toute la suite, on définit la fonction $X : t \longmapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$.

1. En remarquant que $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$, déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = A \times X(t)$.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on admettra que $P \in \mathrm{GL}_2\,(\mathbb{R})$ avec $P^{-1}AP = D$ où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose : $X(t) = PY(t)$ et on remarquera que $X'(t) = PY'(t)$.

a. Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)) \iff (\forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = DY(t))$

b. En notant $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, déterminer alors les fonctions $y_1 : t \longmapsto y_1(t)$ et $y_2 : t \longmapsto y_2(t)$.

c. En déduire l'expression de $X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. Déterminer alors les solutions de $(\star)$ satisfaisant aux conditions initiales données.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1864

1. En notant $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, il vient : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad A \times X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) + 4x_2(t) \\ x_1(t) + x_2() \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = X'(t)$

d'où la matrice A recherchée.

2. a. On a directement que : $(\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)) \Leftrightarrow (\forall t \in \mathbb{R},\ PY'(t) = PDP^{-1}PY(t)) \Leftrightarrow (\forall t \in \mathbb{R},\ PY'(t) = PDY(t)) \Leftrightarrow (\forall t \in \mathbb{R},\ P^{-1}PY'(t) = P^{-1}PDY(t)) \Leftrightarrow (\forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = DY(t))$

b. Puisque l'on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = DY(t)$

il vient : $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1(t) \\ 3y_2(t) \end{pmatrix}$

Par suite, il existe $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t) = \alpha_1 \mathrm{e}^{-t} \\ y_2(t) = \alpha_2 \mathrm{e}^{3t} \end{cases}$.

c. On sait que : $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = PY(t)$

Or : $\forall t \in \mathbb{R},\ PY(t) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathrm{e}^{-t} \\ \alpha_2 \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} = -2\alpha_1 \mathrm{e}^{-t} + 2\alpha_2 \mathrm{e}^{3t}$

$\alpha_1 \mathrm{e}^{-t} + \alpha_2 \mathrm{e}^{3t}$

et ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1(t) = -2\alpha_1 \mathrm{e}^{-t} + 2\alpha_2 \mathrm{e}^{3t} \\ x_2(t) = \alpha_1 \mathrm{e}^{-1} + \alpha_2 \mathrm{e}^{3t} \end{cases}$.

3. On cherche donc $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = -1 \end{cases}$.

Or on a : $x_1(0) = -2\alpha_1 \mathrm{e}^{0} + 2\alpha_2 \mathrm{e}^{3\times 0} = -2\alpha_1 + 2\alpha_2$

et on a : $x_2(0) = \alpha_1 \mathrm{e}^{0} + \alpha_2 \mathrm{e}^{3\times 0} = \alpha_1 + \alpha_2$

Il s'agit donc de résoudre le système d'inconnues α_1 et α_2 : $(\mathcal{S}) : \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -1 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \end{cases}$

Sa résolution à l'aide de sa représentation matricielle donne :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow 4L_1 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

On en déduit donc que : $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1(t) = \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-t} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{3t} \\ x_2(t) = -\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-t} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 0276

Soit E le sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}-$espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ engendré par les trois applications :

$$f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right. \qquad f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right. \qquad f_3 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(2x) \end{array} \right.$$

On considère l'application u donnée par : $u : \left| \begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ f & \longmapsto & \left(f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(\pi), f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \end{array} \right.$

On admet que u est une application linéaire.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ est une famille libre de E. Qu'en déduire pour E ?

2. Écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. u est-il alors un isomorphisme ?

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 0276

On notera $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Recherche de la dimension de E : par définition, $E = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, f_3)$ et par suite E est de dimension au plus 3.
Montrons que la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E, ce qui sera assuré si l'on montre qu'elle est une famille libre de E, puisque déjà génératrice par construction.
Supposons donc que l'on a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = \tilde{0}$.
C'est à dire, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0$.
En particulier pour $x = 0$, on a : $\lambda_1 \times 1 + \lambda_2 \times 0 + \lambda_3 \times 0 = 0$ ce qui donne $\lambda_1 = 0$.
De même pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, il vient : $\lambda_2 \times 1 + \lambda_3 \times 0 = 0$ ce qui donne $\lambda_2 = 0$.
Et finalement, pour $x = \dfrac{\pi}{4}$, il vient : $\lambda_3 \times 1 = 0$ ce qui donne $\lambda_3 = 0$.
On en déduit donc que $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$ et par suite que la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre de E.
$\mathcal{F}$ est donc une base de E.
Puisque $\mathcal{F}$ est une base de E, son cardinal est égal à la dimension de E, qui est donc 3.

Caractère bijectif de u : puisque E et $\mathbb{R}^3$ sont deux espaces vectoriels de même dimension égale à 3, et que $u \in \mathcal{L}\left(E, \mathbb{R}^3\right)$, d'après le théorème de caractérisation des endomophismes bijectifs par leur représentation matricielle :

$$\begin{array}{rcl} (\, f \text{ est bijectif}\,) & \Leftrightarrow & (\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{B}}(u) \in \mathrm{GL3}\,(\mathbb{R})\,) \\ & \Leftrightarrow & (\,\mathrm{rg}\ (\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{B}}(u)) = 3\,) \end{array}$$

Or on a : $\begin{array}{rcl} u\,(f_1) & = & \left(f_1\left(\frac{\pi}{2}\right), f_1(\pi), f_1\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ & = & (1, 1, 1) \end{array}$

puis on a : $\begin{array}{rcl} u\,(f_2) & = & \left(f_2\left(\frac{\pi}{2}\right), f_2(\pi), f_2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ & = & \left(1, 0, \frac{1}{2}\right) \end{array}$

et finalement : $\begin{array}{rcl} u\,(f_3) & = & \left(f_3\left(\frac{\pi}{2}\right), f_3(\pi), f_3\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ & = & \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{array}$

et finalement : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

Un échelonnement en colonnes donne directement que : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{\sim_C} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, cette dernière matrice étant clairement de rang 3 puisque triangulaire inférieure avec tous ses termes diagonaux non nuls.
Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{B}}(u)$ est bien inversible et on en déduit que u est bien un isomorphisme.

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 0276

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 1226

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, A et U les deux matrices carrées d'ordre n suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & \dots & b \\ b & a & b & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b & \vdots \\ \vdots & & & b & a & b \\ b & \dots & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer U^2 en fonction de U puis A^2 en fonction de A et I_n.
2. En déduire condition nécessaire et suffisante pour l'inversibilité de la matrice A et déterminer alors A^{-1} lorsque c'est possible.

EX. 5 | Éléments de correction | Réf. 1226

1. On a directement que :
$$\begin{aligned} U^2 &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} 1\times 1 & \dots & \sum_{k=1}^{n} 1\times 1 \\ \vdots & \sum_{k=1}^{n} 1\times 1 & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} 1\times 1 & \dots & \sum_{k=1}^{n} 1\times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n & \dots & n \\ \vdots & n & \vdots \\ n & \dots & n \end{pmatrix} \\ &= nU \end{aligned}$$

En remarquant que : $A = (a-b)\mathrm{I}_n + bU$,

il vient :
$$\begin{aligned} A^2 &= ((a-b)\mathrm{I}_n + bU) \times ((a-b)\mathrm{I}_n + bU) \\ &\underset{U\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n U = U}{=} (a-b)^2\mathrm{I}_n + b(a-b)U + b(a-b)U + b^2U^2 \\ &= (a-b)^2\mathrm{I}_n + 2b(a-b)U + nb^2U \\ &\underset{bU = A-(a-b)\mathrm{I}_n}{=} (a-b)^2\mathrm{I}_n + 2(a-b)\left(A-(a-b)\mathrm{I}_n\right) + nb\left(A-(a-b)\mathrm{I}_n\right) \\ &= (a-b)^2\mathrm{I}_n + 2(a-b)A - 2(a-b)^2\mathrm{I}_n + nbA - nb(a-b)\mathrm{I}_n \\ &= (2(a-b)+nb)\,A + \left((a-b)^2 - 2(a-b)^2 - nb(a-b)\right)\mathrm{I}_n \\ &= (2a-2b+nb)\,A + (a-b)\left((a-b) - 2(a-b) - nb\right)\mathrm{I}_n \\ &= (2a-2b+nb)\,A + (a-b)\left(-a+b-nb\right)\mathrm{I}_n \end{aligned}$$

On en déduit donc que : $A^2 - (2a-2b+nb)\,A = (a-b)\,(-a+b-nb)\,\mathrm{I}_n$.

- Si $(a-b)\,(-a+b-nb) \neq 0$, alors on a : $A \times \dfrac{1}{(a-b)\,(-a+b-nb)}\left(A - \left(2a-2b+nb^2\mathrm{I}_n\right)\right) = \mathrm{I}_n$ et par définition, la matrice A est alors inversible.
- Si $(a-b)\,(-a+b-nb) = 0$ alors $A^2 - (2a-2b+nb)\,A = (0)$. Si la matrice A était inversible, on aurait alors en multipliant par A^{-1} à gauche que $A - (2a-2b+nb)\,\mathrm{I}_n = 0$ c'est à dire que $A = \left(2a-2b+nb^2\right)\mathrm{I}_n$, ce qui n'est clairement pas le cas, et donc A n'est pas inversible.

Par suite, A est inversible si, et seulement si, $(a-b)\left(-a+b-nb^2\right) \neq 0$.

EX. 6 | Éléments de correction | Réf. 1226

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 0244

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^2 et B^3, puis en déduire B^k pour tout $k \geq 3$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer A^k à l'aide de I_3, B et B^2.
3. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{R}_n[X]$.

   On définit alors la matrice $P(A)$ par : $P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$ où $A^0 = \mathrm{I}_3$.

   a. Déterminer $P'(X)$ et $P''(X)$, puis exprimer à l'aide d'une somme $P'(2)$ et $P''(2)$.

   b. Montrer alors que : $$P(A) = \begin{pmatrix} P(2) & P'(2) & \frac{1}{2}P''(2) \\ 0 & P(2) & P'(2) \\ 0 & 0 & P(2) \end{pmatrix}.$$

   c. Exprimer $P(A)$ dans le cas où $P(X) = 2X^2 - X + 2$.

EX. 7 | Éléments de correction | Réf. 0244

1. On remarque que $A = 2I + B$ et que : $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $B^3 = 0_3$. Ainsi pour tout $p \geq 3, B^p = 0_3$.

   Puisque $2I$ et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme et en déduire que
   $$A^0 = \mathrm{I}_3, \quad A^1 = A \text{ et } \forall k \geq 2, A^k = 2^k I + k2^{k-1}B + \tfrac{k(k-1)}{2}2^{k-2}B^2$$
2. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \geq 2$. On a : $P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ et $P''(X) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k X^{k-2}$ Alors :

   $P(A) = a_0\mathrm{I}_3 + a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k A^k$ qui donne : $P(A) = a_0\mathrm{I}_3 + a_1 B + \sum_{k=2}^{n} a_k \left(2^k\mathrm{I}_3 + k2^{k-1}B + \frac{k(k-1)}{2}2^{k-2}B^2\right)$

   Donc : $P(A) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k 2^k\right)\mathrm{I}_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} k a_k 2^{k-1} k\right) B + \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2} a_k 2^{k-2}\right) B^2$

   et finalement : $P(A) = P(2)\mathrm{I}_3 + P'(2)B + \frac{1}{2}P''(2)B^2$.

   Si $n = 0$ ou $n = 1$, le résultat se montre de la même manière.
3. Puisque $P(X) = 2X^2 - X + 2$, il vient que $P'(X) = 4X - 1$ et $P''(X) = 4$. Ainsi, $P(A) = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.