Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4016

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation aux dérivées partielles suivantes : $(\star) : \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$

1. **Question préliminaire :**
   - **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t$ où $x \in \mathbb{R}$.
   - **b.** En déduire les primitives de la fonction $x \longmapsto \arctan(x)$.
2. En remarquant que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{y}{1+x^2} = y \times \dfrac{1}{1+x^2}$, déterminer alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ pour f solution de $(\star)$.
3. En déduire alors les solutions de $(\star)$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4016

1. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue une intégration par parties sur $[0;x]$ en posant :

$$u(t) = t \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} u'(t) = 1$$
$$v(t) = \arctan(t) \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;x]$, et il vient :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t &= [t\arctan(t)]_0^x - \int_0^x t \times \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+t^2\right)\right]_0^x \quad \text{puisque } 1+t^2>0 \text{ sur } \mathbb{R} \\
&= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)
\end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \\ \text{est solution de } (\star) \text{ sur } \mathbb{R}^2 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y \times \frac{1}{1+x^2}\right) \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{Il existe } g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ telle que :} \\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\arctan(x) + g(y) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. On poursuit la résolution de $(\star)$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \\ \text{est solution de } (\star) \text{ sur } \mathbb{R}^2 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{Il existe } g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ telle que :} \\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\arctan(x) + g(y) \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{Il existe } g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ et } h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{toutes les deux de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ telles que :} \\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y) = y\left(x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right) + x \times g(y) + h(y) \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{Il existe } g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ et } h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{toutes les deux de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ telles que :} \\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y) = xy\arctan(x) - \dfrac{y}{2}\ln\left(1+x^2\right) + xg(y) + h(y) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4017

Dans tout cet exercice, E désigne un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On rappelle que l'on note $f^2 = f \circ f$.

1. Soit $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{x} & \longmapsto & f\left(\overrightarrow{x}\right) \end{array} \right.$ la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$.

- **a.** Justifier que : $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$.
- **b.** Montrer que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}\left(f^2\right)$.
- **c.** En déduire que : $\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}\left(f^2\right) = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f))$.

2. Montrer que : $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^2\right)\right) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}\left(f^2\right)$.

3. En déduire l'équivalence : $\left(\mathrm{Im}\left(f^2\right) = \mathrm{Im}(f)\right) \Leftrightarrow \left(\mathrm{Ker}\left(f^2\right) = \mathrm{Ker}(f)\right)$.

4. Montrer alors que : $\left(\mathrm{Im}\left(f^2\right) = \mathrm{Im}(f)\right) \Leftrightarrow (E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f))$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4017

1. a. Par définition de g et de $\mathrm{Ker}(g)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(g) &= \left\{\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(f),\ g\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}\right\} \\ &= \left\{\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(f),\ f\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}\right\} \\ &= \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) \end{aligned}$$

b. Raisonnons par double inclusion :

Montrons que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}\left(f^2\right)$ **:** soit donc $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Im}(g)$.

Il existe donc $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(f)$ tel que $\overrightarrow{x} = g\left(\overrightarrow{u}\right)$, c'est à dire $\overrightarrow{x} = f\left(\overrightarrow{v}\right)$.

Or $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(f)$, donc il existe $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $\overrightarrow{v} = f\left(\overrightarrow{u}\right)$.

Par suite, on a $\overrightarrow{x} = f\left(f\left(\overrightarrow{u}\right)\right)$ et donc $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Im}\left(f^2\right)$.

Par suite on en déduit que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}\left(f^2\right)$.

Montrons que $\mathrm{Im}\left(f^2\right) \subset \mathrm{Im}(g)$ **:** soit donc $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Im}\left(f^2\right)$.

Il existe donc $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $\overrightarrow{x} = f^2\left(\overrightarrow{u}\right)$, c'est à dire $\overrightarrow{x} = f\left(f\left(\overrightarrow{u}\right)\right)$.

En notant $\overrightarrow{v} = f\left(\overrightarrow{u}\right)$, on en déduit que $\overrightarrow{x} = f\left(\overrightarrow{v}\right)$ avec $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(f)$ par construction. Ainsi, $\overrightarrow{x} = g\left(\overrightarrow{v}\right)$ et par conséquent, $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Im}(g)$.

Par suite, on en déduit que $\mathrm{Im}\left(f^2\right) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Il vient donc $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}\left(f^2\right)$.

c. D'après le théorème du rang appliqué à g, on a : $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(g)) + \mathrm{rg}(g)$
Puisque $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, il vient que $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f))$.
De même, puisque $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}\left(f^2\right)$, il vient que $\dim(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{rg}\left(f^2\right)$.
Ainsi, $\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}\left(f^2\right) = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f))$.

2. D'après le théorème du rang appliqué à f, il vient : $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$.
De même, le théorème du rang appliqué à f donne : $\dim(E) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^2\right)\right) + \mathrm{rg}\left(f^2\right)$.
On en déduit donc que : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^2\right)\right) + \mathrm{rg}\left(f^2\right)$ ce qui donne la relation voulue.

3. Commençons par établir les deux résultats suivants :

$\mathrm{Im}\left(f^2\right) \subset \mathrm{Im}(f)$ **:** soit $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Im}\left(f^2\right)$, il existe donc $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $\overrightarrow{x} = f^2\left(\overrightarrow{u}\right)$.

Par suite, on a que $\overrightarrow{x} = f\left(f\left(\overrightarrow{u}\right)\right)$, donc en posant $\overrightarrow{v} = f\left(\overrightarrow{u}\right)$, on en déduit que $\overrightarrow{x} = f\left(\overrightarrow{u}\right)$, c'est à dire que $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Im}(f)$.

Ainsi, on a bien $\mathrm{Im}\left(f^2\right) \subset \mathrm{Im}(f)$.

$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ **:** soit $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$, et par suite $f\left(f\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = f\left(\overrightarrow{0}\right)$ et comme f est linéaire $f\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$ ce qui donne $f^2\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$ et par conséquent $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.

En conséquence, on a bien $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.

Puisque $\mathrm{Im}\left(f^2\right) \subset \mathrm{Im}(f)$, on a par théorème : $\left(\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\left(f^2\right)\right) \Leftrightarrow \left(\dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) = \dim\left(\mathrm{Im}\left(f^2\right)\right)\right)$
De même $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$, on a par théorème : $\left(\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^2\right)\right) \Leftrightarrow \left(\dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^2\right)\right)\right)$.
Or on a établi à la question précédente que $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^2\right)\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) = \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}\left(f^2\right)$.
Ainsi on a : $\left(\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(f^2\right)\right) \Leftrightarrow \left(\dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^2\right)\right)\right)$
Ce qui permet donc de conclure que : $\left(\mathrm{Im}\left(f^2\right) = \mathrm{Im}(f)\right) \Leftrightarrow \left(\mathrm{Ker}\left(f^2\right) = \mathrm{Ker}(f)\right)$

4. Raisonnons par double équivalence :

Supposons que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ **:** Montrons alors que $\mathrm{Im}\left(f^2\right) = \mathrm{Im}(f)$.
On sait déjà que $\mathrm{Im}\left(f^2\right) \subset \mathrm{Im}(f)$. Il reste donc à montrer l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}\left(f^2\right)$.
Soit alors $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe donc $\overrightarrow{v} \in E$ tel que $\overrightarrow{u} = f\left(\overrightarrow{v}\right)$.
Or $\overrightarrow{v} \in E$, donc il existe $\overrightarrow{v_1} \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\overrightarrow{v_2} \in \mathrm{Im}(f)$ tels que $\overrightarrow{v} = f\left(\overrightarrow{v_1}\right) + f\left(\overrightarrow{v_2}\right)$.
Ainsi, $\overrightarrow{u} = f\left(\overrightarrow{v_1}\right) + f\left(\overrightarrow{v_2}\right)$ par linéarité de f et comme $\overrightarrow{u_1} \in \mathrm{Ker}(f)$, il vient que $\overrightarrow{u} = f\left(\overrightarrow{v_2}\right)$. Or $\overrightarrow{v_2} \in \mathrm{Im}(f)$, donc il existe $\overrightarrow{w_2} \in E$ tel que $\overrightarrow{v_2} = f\left(\overrightarrow{w_2}\right)$ et par suite $\overrightarrow{u} = f^2\left(\overrightarrow{w_2}\right)$ et donc $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}\left(f^2\right)$.
D'où la deuxième inclusion et l'égalité d'ensemble $\mathrm{Im}\left(f^2\right) = \mathrm{Im}(f)$.

Supposons que $\mathrm{Im}\left(f^2\right) = \mathrm{Im}(f)$ **:** Montrons alors $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Montrons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ **:** on sait déjà que $\left\{\overrightarrow{0}\right\} \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ puisque $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ est une intersection de deux sous-espaces de E.
Montrons alors que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
Soit alors $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. On sait donc qu'il existe $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $f\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{x}$ et que $f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$.
Par suite, $f\left(f\left(\overrightarrow{u}\right)\right) = f\left(\overrightarrow{x}\right)$ et docn $f^2\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.
Or, on a par hypothèse que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\left(f^2\right)$, donc d'après la question précédente, on a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ et par suite, on en déduit que $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(f)$. Donc $f\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{0}$, c'est à dire $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
On vient donc d'établir l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ ce qui donne que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
Par conséquent, la somme $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ est directe.

Montrons que $\mathrm{Ker}(f)$ **et** $\mathrm{Im}(f)$ **sont supplémentaires dans** E **:** en effet, on sait déjà que la somme $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ est directe. $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right)$. Or d'après le théorème du rang, on a que $\dim(E) = \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) + \mathrm{rg}(f)$. Par conséquent $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 1216

L'objet de ce problème consiste en l'étude d'endomorphismes u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie qui satisfont la propriété suivante :

$$(\star) : \quad \text{il existe } p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } u^{p-1} \neq 0 \text{ et } u^p = 0$$

Partie A - Un premier exemple

On considère l'application Δ définie par :

$$\Delta : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

où $\mathbb{R}_1[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 1.

1. Rappelez la dimension de $\mathbb{R}_1[X]$ et en donner une base. On ne demande pas de justifier.
2. Vérifier que Δ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.
3. Montrer que Δ vérifie la propriété $(\star)$ et préciser la valeur de l'entier p correspondant.

Partie B - Étude pour $\dim E = 3$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à 3, et soit u endomorphisme de E tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$.
On se propose ici de déterminer le rang de l'endomorphisme u, à savoir la dimension de $\operatorname{Im} f$.
Dans toute la suite de cette partie, a désignera un élément de E tel que $u^2(a) \neq 0$. On pourra remarquer qu'un tel a existe bien. . . .

1. Montrer que la famille $\left(a, u(a), u^2(a)\right)$ est libre dans E.

2. En déduire une base de E.

3. Montrer alors que $\left(u(a), u^2(a)\right)$ est une famille libre d'éléments de $\operatorname{Im} u$.

4. Pourquoi $\operatorname{rg} u \geq 2$?

5. Montrer que u n'est pas injective.

6. En déduire le rang de u.

Partie C - Noyaux itérés et ordre de nilpotence

On se place dans le cas où E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.
Soit u un endomorphisme qui vérifie la propriété $(\star)$, à savoir tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{p-1} \neq 0$ et $u^p = 0$.
L'objet de cette partie est d'établir que l'on a $u^n = 0$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker}\left(u^k\right) \subset \operatorname{Ker}\left(u^{k+1}\right)$.

2. Montrer que si $\operatorname{Ker} u = \{0\}$, alors pour tout entier $k \geq 1$, on a $\operatorname{Ker} u^{k+1} = \{0\}$.

3. Quelle est la dimension maximale pour $\operatorname{Ker} u^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$? Justifier.

4. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général α_n est défini pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $\alpha_n = \dim\left(\operatorname{Ker} u^k\right)$, est constante à partir d'un certain rang p_0.

5. Justifier que $p_0 \leq n$.

6. En déduire que $u^n = 0$.

EX. 3 | Éléments de correction | `Réf. 1216`

Partie A : 1. $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension finie égale à 2, et la famille constituée des polynômes 1 et X est une base de ce dernier.

2. On doit montrer que, pour tout P et Q éléments de $\mathbb{R}_1[X]$, et tout λ réel, on a $\Delta(\lambda P + Q) = \lambda\Delta(P) + \Delta Q$.
Soient donc P et Q éléments de $\mathbb{R}_1[X]$, et λ réel. On a $\Delta(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)' = (\lambda P)' + Q' = \lambda P' + Q' = \lambda\Delta(P) + \Delta(Q)$.
Ce raisonnement étant vrai pour tout P et Q éléments de $\mathbb{R}_1[X]$, et tout λ réel, on en déduit que Δ est linéaire.

3. Tout élément P de $\mathbb{R}_1[X]$ s'écrit donc sous la forme $P = aX + B$ avec a et b réels. Par suite, on en déduit que $\Delta(P) = a$ puis que $\Delta \circ \Delta(P) = 0$, et par conséquent, que pour tout $k \geq 2$, $\Delta^k(P) = 0$. Ainsi Δ vérifie bien $(\star)$, et l'entier p correspondant vaut 2.

Partie B : 1. Soit $a \in E$ tel que $u^2(a) \neq 0$. Un tel a existe puisque $u^2 \neq 0$. On a nécessairement $u(a) \neq 0$ car sinon, $u^2(a) = u(u(a))$ serait nul, et pour la même raison, a ne peut être nul, car sinon $u(a)$ le serait et par suite $u^2(a)$ aussi.
On peut alors considérer la famille $\left(a, u(a), u^2(a)\right)$ et montrer qu'elle est libre. Soient donc α, β et γ trois réels tels que $\alpha a + \beta u(a) + \gamma u^2(a) = 0$. Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. En composant par u deux fois, on obtient $\alpha u^2(a) = 0$ et comme $u^2(a) \neq 0$, on tire $\alpha = 0$. Par suite, en composant une seule fois par u, on titre $\beta u^2(a) = 0$ et donc $\beta = 0$ et reste donc $\gamma u^2(a) = 0$ qui donne $\gamma = 0$. La famille $\left(a, u(a), u^2(a)\right)$ est donc libre.

2. E est un espace vectoriel de dimension 3, et la famille $\left(a, u(a), u^2(a)\right)$ est libre à 3 éléments, donc par théorème, c'est une base de E.

3. Par un raisonnement semblable à la question **B.1**, on montre que $\left(u(a), u^2(a)\right)$ est une famille d'éléments de $\operatorname{Im} u$ qui est libre.

4. D'après la question précédente, puisque $\operatorname{Vect}\left(u(a), u^2(a)\right) \subset \operatorname{Im} f$, on en déduit que $\dim\left(\operatorname{Vect}\left(u(a), u^2(a)\right)\right) \leq \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$. Or $\dim\left(\operatorname{Vect}\left(u(a), u^2(a)\right)\right) = 2$, donc $2 \leq \operatorname{rg} f$.

5. Si u était injective, alors par composition d'applications injectives, les composées u^k pour $k \geq 2$ seraient aussi injectives. Or par hypothèse $u^3 = 0$, c'est à dire $\operatorname{Ker}\left(u^3\right) = E$ ce qui est contraire à $\operatorname{Ker}\left(u^3\right) = \{0\}$ car u^3 est injective. Par suite, on en déduit que u ne peut être injective et donc $\dim(\operatorname{Ker} u) \geq 1$.

6. D'après le théorème du rang, $\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg} f = 3$ donc puisque $\operatorname{rg} f \geq 2$ et $\dim(\operatorname{Ker} u) \geq 1$, on en déduit que $\operatorname{rg} f = 2$.

Partie C : 1. Soit $x \in \mathrm{Ker}\ \left(u^k\right)$, alors $f^k(x) = 0$ donc $f\left(f^k(x)\right) = f(0) = 0$ et $f^{k+1}(x) = 0$ ainsi $x \in \mathrm{Ker}\ \left(u^{k+1}\right)$ donc par suite $\mathrm{Ker}\ \left(u^k\right) \subset \mathrm{Ker}\ \left(u^{k+1}\right)$.

2. Si $\mathrm{Ker}\, u = \{0\}$, alors u est injective, et par composition d'applications injectives, les composées u^k pour $k \geq 2$ seront aussi injectives, et auront leurs noyaux réduits au vecteur nul, d'où le résultat.

3. $\mathrm{Ker}\ \left(u^k\right)$ étant un sous-espace de E, on a $\dim\left(\mathrm{Ker}\ \left(u^k\right)\right) \leq \dim E = n$.

4. La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante compte-tenu de la relation d'inclusion établie à la question **C.1**. Cette suite est à valeurs entières et est majorée par n, donc ne peut prendre qu'un nombre fini de valeur. Comme cette suite est croissante, elle est nécessairement constante à partir d'un certain rang p_0.

5. On a nécessairement $p_0 \leq n$ car même à supposer que cette suite soit strictement croissante sur ses n premiers termes, et elle devient constante à partir du ne, et donc $p_0 \leq n$.

6. Supposons que $u^n \neq 0$. Puisque u vérifie $(\star)$, on a nécessairement $p - 1 \geq n$ car si $p - 1 < n$, on aurait $u^n = u^p \circ u^{n-p}$=0. On a alors la suite d'inclusions suivante : $\mathrm{Ker}\ (u^{p_0}) \subseteq \mathrm{Ker}\ (u^n) \subseteq \mathrm{Ker}\ \left(u^{p-1}\right) \subseteq \mathrm{Ker}\ (u^p) = E$ qui devient donc $\mathrm{Ker}\ (u^{p_0}) = \mathrm{Ker}\ (u^n) = \mathrm{Ker}\ \left(u^{p-1}\right) = \mathrm{Ker}\ (u^p) = E$ puisque la suite des noyaux $\left(\mathrm{Ker}\, u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante pour l'inclusion à partir du rang p_0, et qui donne finalement $\mathrm{Ker}\ (u^n) = E$, et donc $u^n = 0$.