À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [3618] | 1| Développements limités

Montrer que : $\dfrac{1}{x\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)}=\dfrac{1}{x^{2}}-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{12}-\dfrac{x^{2}}{720}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2}\right)$.

Éléments de correction

On a directement : $\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}-1}=\dfrac{x}{x+\dfrac{x^{2}}{2}+\dfrac{x^{3}}{6}+\dfrac{x^{4}}{24}+\dfrac{x^{5}}{120}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{5}\right)}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^{2}}{6}+\dfrac{x^{3}}{24}+\dfrac{x^{4}}{120}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{4}\right)\right)}$.

Ainsi, en composant avec le développement limité en 0 de la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{1+x}$ puisque $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^{2}}{6}+\dfrac{x^{3}}{24}+\dfrac{x^{4}}{120}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{4}\right)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$, et en tronquant à l'ordre 4, il vient :

$$\frac{x}{\mathrm{e}^{x}-1}-1=-\frac{x}{2}+\frac{1}{12}x^{2}-\frac{1}{720}x^{4}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{4}\right)\text{ et donc }\frac{1}{x\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)}-\frac{1}{x^{2}}=-\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}-\frac{x^{2}}{720}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2}\right)$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [2194] | 2| Développement limité

Soit f la fonction définie par :

$$f:\left|\begin{array}{ccc}\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)\end{array}\right.$$

On se propose dans cet exercice d'étudier le comportement de f au voisinage de 0.

(1). Obtention d'un développement limité en 0 de f :

(a). Former le développement limité à l'ordre 6 en 0 de la fonction $x\longmapsto\sin(x)$.

(b). En déduire le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x\longmapsto\dfrac{\sin(x)}{x}$.

(c). Montrer alors que : $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)=-\dfrac{1}{6}x^{2}-\dfrac{1}{180}x^{4}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{5}\right)$.

(d). En déduire le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction f.

(2). Comportement de f en 0 :

À l'aide du développement limité de f obtenu précédemment :

(a). Déterminer la limite lorsque en 0^{+} de f et en déduire que f est prolongeable par continuité en 0. Préciser alors la valeur de $f(0)$.

(b). Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

(c). Étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 0.

Éléments de correction

(1).(a). D'après le cours, il vient directement que : $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)$.

(b). Par suite, le développement limité d'ordre 5 en 0 de $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ s'obtient en multipliant celui-ci par $\dfrac{1}{x}$, pour obtenir :

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$$

(c). Il vient alors : $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right)$, ou encore que :

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln\left(1 - \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right)\right)$$

Par composition des développements limités puisque $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{120} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on en déduit ainsi que :

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right)^4 - \frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right)^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$$

On développe l'expression polynomiale obtenue par composition des développements limités, en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à 5 pour obtenir finalement :

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$$

(d). Par suite, le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction f sera :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right) \\ &= -\frac{1}{6}x - \frac{1}{180}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \end{aligned}$$

(2).(a). Puisque $f(x) = -\dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{180}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$, il vient directement que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
On peut alors prolonger f par continuité en 0 puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ existe et est finie. On posera alors $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

(b). Puisque $f(x) = -\dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{180}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$, il vient que la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{6}x$ est la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0, étant entendu que l'on parle ici du prolongement de f.

(c). La position de $\mathcal{T}$ par rapport à la courbe représentative de f est donnée par l'étude du signe de $-\dfrac{1}{180}x^3$ au voisinage de 0^+. Cette dernière quantité est ainsi clairement négative, donc $\mathcal{T}$ est au-dessus de la courbe représentative de f en ce point.