À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [1224] | 1| Puissance de matrices

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A + N$.

(1). Pour quelles valeurs de a, la matrice B est-elle inversible ? Calculer alors B^{-1} pour ces valeurs de a.

(2). Vérifier que $AN = NA$ et $N^3 = (0)$.

(3). Montrer par récurrence sur l'entier p que : $\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = a^p \mathrm{I}_3$.

(4). Exprimer B^n pour tout entier $n \geq 2$, en fonction de I_3, N et N^2.

Éléments de correction

(1). On voit que B est triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont non nuls dès lors que $a \neq 0$, et par suite, elle est inversible, et on trouve $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$.

(2). $NA = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = AN$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc, pour tout $k \geq 3$, $N^k = 0$.

(3). Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(p)$:« $A^p = a^p \mathrm{I}_3$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier p que $\mathcal{P}(p)$ est vrai pour tout entier p.

Initialisation : pour $p = 0$, il vient que $A^0 = \mathrm{I}_3$.
Or $a^0 \mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_3$ donc $A^0 = \mathrm{I}_3$ et la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons que pour $p \in \mathbb{N}$ on ait la propriété $\mathcal{P}(p)$, c'est à dire $A^p = a^p \mathrm{I}_3$, et montrons, sous cette hypothèse que l'on a la propriété $\mathcal{P}(p+1)$, c'est à dire $A^{p+1} = a^{p+1} \mathrm{I}_3$.
Par définition $A^{p+1} = A \times A^p$. Or par hypothèse de récurrence, $A^p = a^p \mathrm{I}_3$. Ainsi $A^{p+1} = A \times (a^p \mathrm{I}_3)$. En remarquant que $A = a\mathrm{I}_3$, il vient alors que $A^{p+1} = a^{p+1} \mathrm{I}_3$, d'où $\mathcal{P}(p+1)$.

Conclusion : la proposition étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier p.

(4). Comme $AN = NA$, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} B^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} A^{n-k} N^k \\ &= A^n + nA^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2} A^{n-2} N^2 \end{aligned}$$

qui donne $B^n = a^n \mathrm{I}_3 + n a^{n-1} N + \dfrac{n(n-1)}{2} a^{n-2} N^2$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [2195] | 2| Matrices inversibles et puissances de matrices

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(1). Calculer M^2 puis $M^2 + M - 2\mathrm{I}_3$.

(2). En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.

(3). Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(4). On pose $Q = P^{-1}MP$.

(a). Montrer par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PQ^nP^{-1}$.

(b). Calculer Q, Q^2, Q^3 et Q^4.

(c). Conjecturer une expression de Q^n où $n \in \mathbb{N}$.
Justifier votre réponse par récurrence.

(d). En déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}$ que l'on explicitera.

Éléments de correction

(1). On obtient que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, et par suite que :

$$M^2 + M - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2). Puisque $M^2 + M - 2\mathrm{I}_3 = 0$, on peut écrire : $M^2 + M = 2\mathrm{I}_3$.
Par suite : $M(M + \mathrm{I}_3) = 2\mathrm{I}_3$.
Ainsi : $M\left(\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}\mathrm{I}_3\right) = \mathrm{I}_3$.

Il existe donc une matrice $N = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}\mathrm{I}_3$ qui vérifie $M \times N = \mathrm{I}_3$.

Par conséquent, la matrice M est inversible d'inverse $\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}\mathrm{I}_3$ qui est donc : $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

(3). On fait opérer l'algorithme de Gauss sur la matrice augmentée $(P\,|\,\mathrm{I}_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)}_{\substack{\text{Les trois pivots sont non nuls,} \\ \text{la matrice et inversible}}} \underset{L_3 \leftarrow \frac{2}{3}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

La matrice P est donc inversible d'inverse la matrice $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

(4).(a). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$:« $M^n = PQ^nP^{-1}$ »

Montrons par récurrence sur l'entier n, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est à dire que $M^0 = PQ^0P^{-1}$.

On sait que $M^0 = \mathrm{I}_3$. De plus : $$\begin{aligned} PQ^0P^{-1} &= P\mathrm{I}_3P^{-1} \\ &= PP^{-1} \\ &= \mathrm{I}_3 \end{aligned}$$

et par conséquent $M^0 = PQ^0P^{-1}$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire $M^n = PQ^nP^{-1}$.

Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire que $M^{n+1} = PQ^{n+1}P^{-1}$.

On sait que $M^{n+1} = M \times M^n$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $M^{n+1} = MPQ^nP^{-1}$.

Or on a : $Q = P^{-1}MP$, donc en multipliant à gauche cette égalité par P, il vient que $PQ = MP$ puisque $P^{-1}P = \mathrm{I}_3$, et en multipliant à droite par P^{-1}, il vient que $PQP^{-1} = M$ puisuqe $PP^{-1} = \mathrm{I}_3$.

Par suite, on a donc $M^{n+1} = P\,\underbrace{Q\,\underbrace{P^{-1}P}_{=\mathrm{I}_3}\,Q^n}_{=Q^{n+1}}\,P^{-1}$ ce qui donne que $M = PQ^{n+1}P^{-1}$, ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(\backslash)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

(b). On obtient :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad Q^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad Q^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

(c). On peut conjecturer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$:« $Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ »

Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n par récurrence sur n.

nitialisation : pour $n = 0$, on vérifie que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est à dire que l'on a bien $Q^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^0 \end{pmatrix}$.

Par convention $Q^0 = \mathrm{I}_3$ et $(-2)^0 = 1$ donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^0 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3$, soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^0 \end{pmatrix} = Q^0$, ce qui est bien $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : on suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$, on ait la propriété la propriété $\mathcal{P}(n)$, à savoir $Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$, et montrons que, sous cette hypothèe, on a la propriété $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire $Q^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{n+1} \end{pmatrix}$.

Par définition : $Q^{n+1} = Q^n Q$. Or par hypothèse de récurrence, $Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$.

Par conséquent : $Q^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et il vient : $Q^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{n+1} \end{pmatrix}$ qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(0)$ étant vraie, et la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$.

(d). De la relation $PQ^nP^{-1} = M^n$, en effectuant ce dernier produit, il vient ainsi :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-2)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-2)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-2)^n \end{pmatrix}$$