Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 3742

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ m & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Discuter de l'injectivité de f suivant m.

2. Dans tous les cas, donner le rang de f, une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 3743

Dans tout cet exercice, m désigne un réel et on note $A(m)$ la matrice $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 1-m \end{pmatrix}$

On désignera par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $A(m)$.

On note par ailleurs $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On suppose dans cette question que $m = 1$.

- **a.** Déterminer une base du noyau et de l'image de f.
- **b.** Calculer, pour tout n entier naturel non nul $(A(1))^n$.

2. Dans toute la suite de l'exercice on suppose que $m \neq 1$.

- **a.** Justifier le fait que $A(m)$ est inversible.
- **b.** Déterminer deux réels a et b dépendants de m tels que l'on ait $(A(m))^2 = aA(m) + b\mathrm{I}_3$.
- **c.** En déduire une expression de $(A(m))^{-1}$ en fonction de $A(m)$ et de I_3, puis expliciter les coefficients de $(A(m))^{-1}$ en fonction de m.

3. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- **a.** Calculer J^2.
- **b.** En déduire J^k en fonction de J et de k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
- **c.** Exprimer $A(m)$ en fonction de I_3, J et m.
- **d.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad (A(m))^n = \mathrm{I}_3 + (1-(1-m)^n)\, J$.