Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 1368

On désigne par $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on considère $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Dans tout l'exercice on notera $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Exprimer A^2 en fonction de A et de I_3.
En déduire que la matrice A est inversible, et déterminer alors A^{-1}.

2. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

3. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$ et $v_3 = (0, 1, -1)$, est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.

EX. 2 | Réf. 0418

Dans tout ce qui suite, on désigne par A la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par : $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

On considère alors $T : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MA - AM \end{array} \right.$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer la matrice de T dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. T est-il un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 0443

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est **unipotente** lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\quad (A - \mathrm{I}_n)^p = (0)$
Soit alors A une matrice unipotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est inversible.

2. Montrer que A^{-1} est unipotente.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que A^k est unipotente.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 4570

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $\quad f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$.

2. f est-il surjectif ?

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

4. A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$?

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 3744

On rappelle que $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On définit les deux fonctions ch et sh appelées respectives cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique par :

$$\operatorname{ch} : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array}\right.$$

On note alors $H = \operatorname{Vect}(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ et $F = \{f \in H,\ f(\ln(2)) = 0\}$.

1. Déterminer la dimension de H.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H.
3. Déterminer une base et la dimension de F.
4. Soit $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ f & \longmapsto & (f(-\ln(2)), f(\ln(2))) \end{array}\right.$. Montrer que φ est un isomorphisme.