Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 3918

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
On désigne par Γ l'arc paramétré du plan dont un paramétrage est :

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 4\cos^2(t)\sin^3(t) \\ y(t) = \left(3 - 2\cos^2(t)\right)\cos^2(t) \end{cases}$$

1. Montrer que l'on peut restreindre l'étude de Γ à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et préciser l'ensemble des transformations géométriques à faire opérer de sorte à reconstituer tout Γ.
2. Montrer que : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = 2\sin^2(t)\cos(t)\left[1 + 5\cos(2t)\right] \\ y'(t) = 2\cos(3t)\sin(t) \end{cases}$
   On peut admettre la question et poursuivre.
3. Construire le tableau des variations conjointes de x et y sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, et préciser les vecteurs dirigeant les tangentes aux points de paramètre $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$, ainsi que les points à tangentes horizontales et verticales.
4. Construire alors Γ.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 3920

Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ est dite harmonique sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

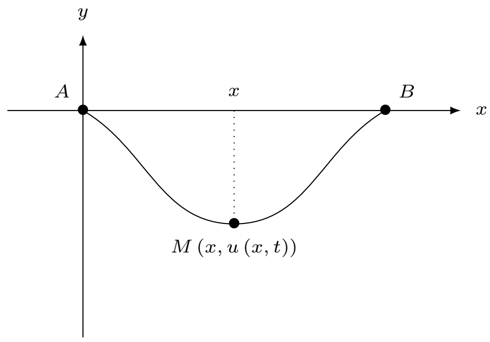
Dans tout cet exercice, on suppose que f est une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

1. On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}^2$.
   Montrer que les applications $h_1 : (x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $h_2 : (x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ et $h_3 : (x, y) \longmapsto x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont aussi harmoniques.
2. On suppose de plus dans cette fonction qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \varphi\left(x^2 + y^2\right)$$
   a. Exprimer les dérivées partielles secondes de f en fonction de φ et de ses dérivées.
   b. Démontrer que φ' est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on résoudra.
   c. En déduire l'expression de f.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 3919

Une corde est tendue entre ses deux extrémités A et B où l'on pose $AB = L$.
On l'écarte verticalement de sa position d'équilibre, puis on la lache. Elle se met alors à vibrer dans un plan vertical passant par A et B que l'on munit alors d'un repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ tel que $\overrightarrow{AB} = L\overrightarrow{i}$ comme illustré ci-contre.
On supposera que tous les points de la corde conservent à tout instant t la même abscisse.
On note alors $u : [0;L[\times [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui à tout couple (x,t) associe l'ordonnée du point M d'abscisse x de la corde à l'instant t.



On démontre que la fonction u satisfait à l'équation des cordes vibrantes $(\star)$: $(\star) : \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 0$
où $c > 0$ est une constante dépendant des paramètres physiques de la corde, avec les conditions dites « aux limites » suivantes :

$$\forall t \in [0;+\infty[\,, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ qui traduisent le fait que les extrémités sont fixes.}$$

On se propose ici de déterminer les solutions particulières u non nulles de ce problème qui sont dites « à variables séparées », c'est à dire de la forme :

$$\forall (x,t) \in [0;L[\times [0;+\infty[\,, \quad u(x,t) = f(x) \times g(t)$$

où $f : [0;L[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classes $\mathcal{C}^2$ sur leur ensemble de définition.
Dans toute la suite, on notera $\mathcal{U} = [0;L[\times [0;+\infty[$ et $I = [0;L[$.

1. Exprimer les dérivées partielles premières et secondes de u en tout point (x,t) de $\mathcal{U}$ en fonction de f, g et leurs dérivées respectives.
2. Montrer que : $\big(\ u \text{ est solution de } (\star) \text{ sur } \mathcal{U}\ \big) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall (x,t) \in \mathcal{U}, \quad g(t)f''(x) - \dfrac{1}{c^2}f(x)g''(t) = 0\right)$
3. Montrer qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \neq 0$.
   Pour toute la suite de l'exercice, on note $\lambda = \dfrac{f''(x_0)}{f(x_0)}$.
4. Montrer alors que : $\forall t \in [0;+\infty[\,,\ g''(t) = \lambda c^2 g(t)$
   puis que : $\forall x \in I,\ f''(x) = \lambda f(x)$.
5. Montrer que $f(0) = f(L) = 0$.
6. Montrer que si $\lambda = 0$, alors f est la fonction nulle. Qu'en conclure par rapport à notre recherche ?
7. Montrer que si $\lambda > 0$, alors f est la fonction nulle. Qu'en conclure par rapport à notre recherche ?
8. On suppose alors pour toute la suite de l'exercice que l'on a $\lambda < 0$.
   a. Déterminer la fonction f solution du problème $\begin{cases} \forall x \in I, f''(x) = \lambda f(x) \\ f(0) = 0 \\ f(L) = 0 \end{cases}$ et montrer que $\lambda = \dfrac{k^2\pi^2}{L^2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   b. Déterminer alors la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
9. Déduire de ce qui précède que les fonctions u solution de $(\star)$ non nulles et à variables séparées sont de la forme :

$$\forall (x,t) \in \mathcal{U}, \quad u(x,t) = K \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}c\,(t-t_0)\right) \text{ où } (K,t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$