Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [4765] | 1| Covariance et indépendance

On considère deux variables aléatoires X et Y réelles fineis dont la loi de couple est la loi uniforme sur l'ensemble $\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$.

(1). Préciser les lois marginales des variables aléatoires X et Y.

(2). Calculer la covariance des variables X et Y. Qu'en conclure ?

(3). Vérifier que les variables aléatoires $U = X + Y$ et $V = X - Y$ sont indépendantes.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [1033] | 2| Étude d'un endomorphisme

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -m & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1). Montrer que $e_1 + e_4 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $me_1 + e_3 \in \mathrm{Ker}(f)$.

(2). Quel est le rang de f ? Justifier votre réponse.

(3). Déterminer alors une base $\mathcal{B}_k$ de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base $\mathcal{B}_I$ de $\mathrm{Im}(f)$.

(4). Vérifier que : $\left(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (m \neq 0)$

(5). Dans cette question $m = 0$.
On rappelle que l'on note $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\substack{f \text{ composée } p \text{ fois} \\ \text{avec elle même}}}$.
Déterminer le plus petit $p \in \mathbb{N}^*$ possible tel que $\mathrm{Ker}(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.