Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [2787] | 1| Trigonométrie

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)$

puis que :
$$\cos^4(x) + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \frac{2\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

Exercice| [4798] | 2| Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y - z + t = 0\right\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4797] | 3| Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

On considère $F = \text{Vect}\,(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ où :

$$v_1 = (1,1,1,1)\,, \quad v_2 = (1,2,3,4)\,, \quad v_3 = (3,1,4,2)\,, \quad v_4 = (10,4,13,7) \quad v_5 = (1,7,8,14)$$

et on note A la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_5)$.

(1). La famille $\mathcal{F}$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$? génératrice de $\mathbb{R}^4$?

(2). Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(3). Soit $b = (b_1, \ldots, b_4)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Quelle(s) est(sont) l'(es) équation(s) de compatibilité du système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 7 & b_2 \\ 1 & 3 & 4 & 13 & 8 & b_3 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 14 & b_4 \end{array}\right)$?

(4). À l'aide des relations précédentes, caractériser alors les éléments de F à l'aide d'une ou plusieurs équations.

(5). Toujours à l'aide de la question **(3)**, déterminer 3 vecteurs u_1, u_2, u_3 vecteurs tels que $F = \text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)$.

(6). La famille $\mathcal{G} = (u_1, u_2, u_3)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$?