Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2444

Mettre sous forme d'un seul quotient chacune des expressions suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $A(n) = \dfrac{1}{2(n-1)} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2(n+1)}$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{(x-1)^3} + \dfrac{1}{(x-1)^4}$
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\quad q(t) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+t^2}}}}$

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2444

1. On procède à une mise au même dénominateur, en n'oubliant pas les facteurs 2 qui sont présents sur deux des quotients.
2. On procède à une mise au même dénominateur en remarquant que le dénominateur commun est $x(x-1)^4$.
3. On procède à des mises au même dénominateur successives.

EX. 2 | Réf. 2445

On considère la fonction polynôme du second degré suivante :

$$f : \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 2x + 2 \end{array}\right.$$

Expliciter puis simplifier les expressions suivantes :

1. $f(x+1)$ où $x \in \mathbb{R}$;
2. $f(x-1)$ où $x \in \mathbb{R}$;
3. $f(2x+1)$ où $x \in \mathbb{R}$;
4. $f\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ où $x \in \mathbb{R}^*$;
5. $f\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$ où $x \in \mathbb{R}^*$;
6. $f\left(\dfrac{x-2}{x}\right)$ où $x \in \mathbb{R}^*$;

Pour les trois dernières expressions, on donnera le résultat sous forme d'un quotient.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2445

1. substituer $x+1$ à x dans l'expression de f en respectant le parenthésage sous-jacent, puis simplifier.
2. substituer $x-1$ à x dans l'expression de f en respectant le parenthésage sous-jacent, puis simplifier.
3. substituer $2x+1$ à x dans l'expression de f en respectant le parenthésage sous-jacent, puis simplifier.
4. substituer $1 + \dfrac{1}{x}$ à x dans l'expression de f en respectant le parenthésage sous-jacent, puis simplifier.
5. substituer $1 - \dfrac{1}{x}$ à x dans l'expression de f en respectant le parenthésage sous-jacent, puis simplifier.
6. substituer $\dfrac{x-2}{x}$ à x dans l'expression de f en respectant le parenthésage sous-jacent, puis simplifier.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2443

On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ dont on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ la base de vecteurs du plan associée. Les coordonnées des points et vecteurs sont données respectivement dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{B}$.
Soient $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 - 2x + y^2 - 6y - 6 = 0$ et $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(1, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon R.
2. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.
3. Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont sécants.
   On ne demande pas dans cette question de déterminer le(s) point(s) d'intersection.
4. **a.** Justifier que : $$M(x, y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} (x-1)^2 + (y-3)^2 - 16 = 0 \\ x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \end{array} \right.$$
   b. Déterminer les valeurs de t qui sont solutions du système précédent.
   c. En déduire alors les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2443

1. Procéder à une factorisation de sorte à faire apparaître une équation cartésienne de cercle qui permettra d'en déterminer les éléments caractéristiques.
2. La droite $\mathcal{D}$ étant donnée par un point et un vecteur directeur, une représentation paramétrique s'en déduit directement.
3. Il suffit de s'assurer que la distance du point Ω à la droite $\mathcal{D}$ est inférieure au rayon, donc d'avoir au préalable obtenu une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ pour appliquer la formule de calcul de distance.
4. **a.** Il suffit de traduire le fait que le point cherché appartient à la fois à $\mathcal{D}$ et à la fois à $\mathcal{C}$ en utilisant les bonnes caractérisations analytiques de ces deux ensembles.
   b. On résout le système obtenu en reportant les valeurs de x et y en fonction de t dans la première équation qui devient alors une équation de degré 2 en t que l'on sait résoudre.
   c. Il suffit alors d'utiliser le paramétrage de $\mathcal{D}$ en y reportant les valeurs de t trouvée à la question précédente pour obtenir les deux points d'intersection recherchés.