Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1970

1. Calculer les dérivées des fonctions f données ci-après, définies et dérivables sur l'intervalle I.

a. $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$;

b. $f(x) = x^2\left(\ln(x) - \dfrac{1}{x}\right)$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$;

c. $f(x) = \mathrm{e}^{x}\left(2x^2 - x + 1\right)$ sur $I = \mathbb{R}$;

d. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$ sur $I =]2; +\infty[$.

2. Déterminer une primitive des fonctions f données ci-après, définies et continues sur l'intervalle I.

a. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$;

b. $f(x) = 3x\mathrm{e}^{-x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$;

c. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ sur $I =]1; +\infty[$;

d. $f(x) = -4\sin(2x)\left(\cos(2x)\right)^3$ sur $I = \mathbb{R}$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1970

1. **a.** Une forme produit dont un facteur est du type e^{u} ;
b. Un produit à dériver…
c. Un produit à dériver…
d. Une forme du type $\ln(u)$;

2. **a.** On primitive directement chaque terme de cette somme ;
b. Cela ressemble beaucoup à la dérivée d'une fonction du type e^{u} ;
c. Cela ressemble beaucoup à la dérivée d'une fonction du type $\dfrac{u'}{u}$;
d. Cela ressemble beaucoup à la dérivée d'une fonction du type u^n ;

EX. 2 | Réf. 1944

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O\,;\, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, et les coordonnées des points et vecteurs, ainsi que les équations de droites, seront données dans ce dernier.
m étant un paramètre réel, on considère la famille de droites $(\mathcal{D}_m)$ où $\mathcal{D}_m :\quad mx + 2y - 1 = 0$.

1. Montrer que toutes les droites de la famille contiennent un même point A dont on donnera les coordonnées.

2. Déterminer les droites $\mathcal{D}_m$ de la famille qui sont parallèles à la droite Δ d'équation $y = x$.

3. Déterminer les droites $\mathcal{D}_m$ de la famille qui contiennent le point $B\,(-1, 1)$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1944

1. Ce point A ne doit pas dépendre du paramètre m. Il faut donc en chercher des coordonnées de sorte qu'elles ne dépendent pas de m et qu'elles vérifient l'équation donnée pour $\mathcal{D}_m$;

2. Quels sont les vecteurs directeurs de Δ et $\mathcal{D}_m$…

3. Il s'agit de trouver la valeur de m telle que $B \in \mathcal{D}_m$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 1968

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soit le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0$ dans le repère $\mathcal{R}$.

1. Le point O appartient-il à $\mathcal{C}$?

2. Déterminer les deux autres points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ avec les deux axes de coordonnées.
On notera A le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses autre que O, et B celui avec l'axe des ordonnées autre que O.

3. En vous servant uniquement des résultats de la **question (1).** et de la **question (2).**, déterminer le centre Ω et le rayon R du cercle $\mathcal{C}$.

4. Quelle est une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point O ?

5. **a.** Quelles sont les coordonnées du milieu K du segment $[OA]$.

b. Vérifier que la droite Δ d'équation $x = \dfrac{3}{2}$ est la médiatrice du segment $[OA]$.

c. Déterminer le point d'intersection L entre Δ et $\mathcal{T}$.

d. Montrer alors que la droite (AL) est tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point A.

6. Les droites $\mathcal{T}$ et (AL) sont-elles perpendiculaires ?

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1968

1. Comment vérifier qu'un point appartient à un cercle dont on connaît une équation cartésienne ?

2. Pourquoi y en a-t-il que deux d'ailleurs ? Quelles sont donc nécessairement leurs abscisse ou ordonnée ?

3. Penser peut-être à un résultat de la classe de 4e...

4. Commencer par chercher un vecteur normal à cette tangente.

5. **a.** Calculer les coordonnées du milieu d'un segment ;

b. Qu'est-ce qu'une médiatrice ?

c. Trouver le point d'intersection entre deux droites demande peut-être la connaissance d'équations cartésiennes ou de paramétrage au préalable...

d. Dans quel cas une droite est-elle tangente à un cercle ?

6. Trouver des vecteurs normaux ou directeurs de ces deux droites.