Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 3742

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ m & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Discuter de l'injectivité de f suivant m.
2. Dans tous les cas, donner le rang de f, une base et la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3742

1. Comme f est un endomorphisme en dimension fini, son caractère injectif est équivalent à son caractère bijectif qui lui même est équivalent au caractère inversible de sa représentation matricielle.
2. On poursuit ici simplement les discussions engagées dans la question précédente.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 3743

Dans tout cet exercice, m désigne un réel et on note $A(m)$ la matrice $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 1-m \end{pmatrix}$

On désignera par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $A(m)$.

On note par ailleurs $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On suppose dans cette question que $m = 1$.
   a. Déterminer une base du noyau et de l'image de f.
   b. Calculer, pour tout n entier naturel non nul $(A(1))^n$.
2. Dans toute la suite de l'exercice on suppose que $m \neq 1$.
   a. Justifier le fait que $A(m)$ est inversible.
   b. Déterminer deux réels a et b dépendants de m tels que l'on ait $(A(m))^2 = aA(m) + b\mathrm{I}_3$.
   c. En déduire une expression de $(A(m))^{-1}$ en fonction de $A(m)$ et de I_3, puis expliciter les coefficients de $(A(m))^{-1}$ en fonction de m.
3. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   a. Calculer J^2.
   b. En déduire J^k en fonction de J et de k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   c. Exprimer $A(m)$ en fonction de I_3, J et m.
   d. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad (A(m))^n = \mathrm{I}_3 + (1 - (1-m)^n)\, J$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf . 3743

1. **a.** On remplace m par 1, et on utilise les méthodes usuelles pour déterminer une base du noyau et de l'image d'une application linéaire donnée par sa matrice.

   b. On calcule $A(1)^2$ et $A(1)^3$ pour conjecturer la forme de $(A(m))^n$ que l'on établit alors par récurrence.

2. **a.** $A(m)$ est une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont non nuls...

   b. On calcule $(A(m))^2$ que l'on décompose à l'aide de $A(m)$ et I_3.

   c. On dispose d'un polynôme de la matrice $A(m)$ qu'il suffit d'exploiter après une factorisation pour avoir l'expression de $(A(m))^{-1}$.

   d. On exploite simplement la relation précédente.

3. **a.** RAS

   b. On calcule J^3 pour voir que...

   c. RAS

   d. On peut toujours exploiter le binôme de Newton ici.