Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 3918

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
On désigne par Γ l'arc paramétré du plan dont un paramétrage est :

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 4\cos^2(t)\sin^3(t) \\ y(t) = \left(3 - 2\cos^2(t)\right)\cos^2(t) \end{cases}$$

1. Montrer que l'on peut restreindre l'étude de Γ à l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et préciser l'ensemble des transformations géométriques à faire opérer de sorte à reconstituer tout Γ.

2. Montrer que : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = 2\sin^2(t)\cos(t)\left[1 + 5\cos(2t)\right] \\ y'(t) = 2\cos(3t)\sin(t) \end{cases}$

On peut admettre la question et poursuivre.

3. Construire le tableau des variations conjointes de x et y sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, et préciser les vecteurs dirigeant les tangentes aux points de paramètre $t = 0$ et $t = \dfrac{\pi}{2}$, ainsi que les points à tangentes horizontales et verticales.

4. Construire alors Γ.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3918

1. Discussions classiques. . .périodicité, parité/imparité de x et y pour obtenir l'intervalle $[0;\pi]$ sur lequel on cherche encore des éléments de symétrie avec $x(\pi - t)$ et $y(\pi - t)$.

2. On dérive sans se tromper et on utilise au maximum les relations trigonométriques pour aboutir aux formes proposées.

3. On analyse les deux expressions de $x'(t)$ et $y'(t)$ pour dégager les facteurs qui en donnent le signe sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et pour lesquels on en fait l'étude proprement !

4. On procède au tracé en ayant au préalable positionné les points et les tangentes identifiées précédemment.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 3920

Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ est dite harmonique sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ si elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Dans tout cet exercice, on suppose que f est une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

1. On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}^2$.
Montrer que les applications $h_1 : (x,y) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $h_2 : (x,y) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et $h_3 : (x,y) \longmapsto x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont aussi harmoniques.

2. On suppose de plus dans cette fonction qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \varphi\left(x^2 + y^2\right)$$

a. Exprimer les dérivées partielles secondes de f en fonction de φ et de ses dérivées.

b. Démontrer que φ' est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on résoudra.

c. En déduire l'expression de f.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3920

1. Il suffit de calculer pour chaque fonction proposée les dérivées partielles d'ordre 2 en utilisant le fait que f est elle même harmonique et justifier l'utilisation du théorème de Schwarz.
2. **a.** On utilise la formule pour les dérivées de fonctions composées pour les fonctions numériques pour calculer les dérivées partilles de f.

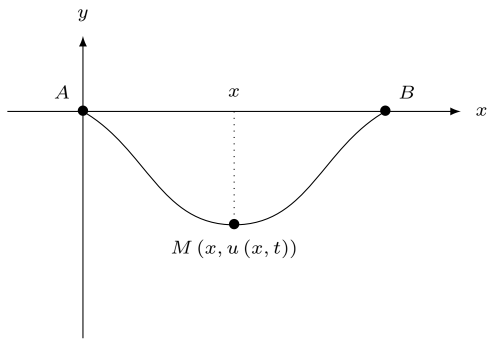
   b. On exploite le fait que f est harmonique pour obtenir une équation différentielle dont φ est solution.

   c. On revient à f en exploitant la forme de φ.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 3919

Une corde est tendue entre ses deux extrémités A et B où l'on pose $AB = L$.
On l'écarte verticalement de sa position d'équilibre, puis on la lache. Elle se met alors à vibrer dans un plan vertical passant par A et B que l'on munit alors d'un repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ tel que $\overrightarrow{AB} = L\overrightarrow{i}$ comme illustré ci-contre.
On supposera que tous les points de la corde conservent à tout instant t la même abscisse.
On note alors $u : [0; L[\times [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui à tout couple (x,t) associe l'ordonnée du point M d'abscisse x de la corde à l'instant t.



On démontre que la fonction u satisfait à l'équation des cordes vibrantes $(\star)$: $\quad (\star) : \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 0$
où $c > 0$ est une constante dépendant des paramètres physiques de la corde, avec les conditions dites « aux limites » suivantes :

$$\forall t \in [0; +\infty[, \quad u\,(0,t) = u\,(L,t) = 0 \text{ qui traduisent le fait que les extrémités sont fixes.}$$

On se propose ici de déterminer les solutions particulières u non nulles de ce problème qui sont dites « à variables séparées », c'est à dire de la forme :

$$\forall\,(x,t) \in [0; L[\times [0; +\infty[, \quad u\,(x,t) = f(x) \times g(t)$$

où $f : [0; L[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classes $\mathcal{C}^2$ sur leur ensemble de définition.
Dans toute la suite, on notera $\mathcal{U} = [0; L[\times [0; +\infty[$ et $I = [0; L[$.

1. Exprimer les dérivées partielles premières et secondes de u en tout point (x,t) de $\mathcal{U}$ en fonction de f, g et leurs dérivées respectives.
2. Montrer que : $\quad (\ u \text{ est solution de } (\star) \text{ sur } \mathcal{U}\ ) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall\,(x,t) \in \mathcal{U}, \quad g(t)f''(x) - \dfrac{1}{c^2}f(x)g''(t) = 0\right)$
3. Montrer qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $f\,(x_0) \neq 0$.
   Pour toute la suite de l'exercice, on note $\lambda = \dfrac{f''\,(x_0)}{f\,(x_0)}$.
4. Montrer alors que : $\quad \forall t \in [0; +\infty[\,,\ g''(t) = \lambda c^2 g(t)$
   puis que : $\quad \forall x \in I,\ f''(x) = \lambda f(x)$.
5. Montrer que $f(0) = f(L) = 0$.
6. Montrer que si $\lambda = 0$, alors f est la fonction nulle. Qu'en conclure par rapport à notre recherche ?
7. Montrer que si $\lambda > 0$, alors f est la fonction nulle. Qu'en conclure par rapport à notre recherche ?
8. On suppose alors pour toute la suite de l'exercice que l'on a $\lambda < 0$.

a. Déterminer la fonction f solution du problème $\begin{cases} \forall x \in I, f''(x) = \lambda f(x) \\ f(0) = 0 \\ f(L) = 0 \end{cases}$ et montrer que $\lambda = \dfrac{k^2\pi^2}{L^2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

b. Déterminer alors la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

9. Déduire de ce qui précède que les fonctions u solution de $(\star)$ non nulles et à variables séparées sont de la forme :

$$\forall (x,t) \in \mathcal{U}, \quad u(x,t) = K \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}c(t-t_0)\right) \text{ où } (K,t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3919

1. En tenant compte que la fonction est à variables séparables, les dérivées s'obtiennent toutes seules.

2. Il suffit de reporte les dérivées partielles précédentes dans l'équation $(\star)$.

3. Qu'est ce que cela veut dire que u n'est pas nulle sur $\mathcal{U}$?

4. Il suffit de manipuler la relation de la question (2).

5. On exploite les conditions aux limites sur u.

6. On regarde ce qu'il se passe sur la forme des solutions dans ce cas par rapport au fait que u ne doit pas être nulle.

7. Même chose.

8. **a.** C'est une équation différentielle linéaire à résoudre.

b. Même chose.

9. On rassemble tous les résultats de l'exercice !