À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [2787] | 1| Trigonométrie

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos^4(x)+\sin^4(x)=1-\dfrac{1}{2}\sin^2(2x)$

puis que : $$\cos^4(x)+\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^4\left(x+\frac{2\pi}{4}\right)+\cos^4\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}$$

Pistes de réflexion

- Utiliser les formules $\cos^2(x)=\dfrac{\cos 2x+1}{2}$ et $\sin^2(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$, puis élever au carré.
- Se ramener à l'expression précédente en transformant les sinus en cosinus.

Exercice| [4798] | 2| Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x-y-z+t=0\right\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Pistes de réflexion

On s'assurera donc que :

- F est bien un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$
- le vecteur nul de $\mathbb{R}^4$ appartient à F
- F est stable par combinaison linéaire

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4797] | 3| Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

On considère $F=\mathrm{Vect}\,(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$ où :

$$v_1=(1,1,1,1)\,,\quad v_2=(1,2,3,4)\,,\quad v_3=(3,1,4,2)\,,\quad v_4=(10,4,13,7)\quad v_5=(1,7,8,14)$$

et on note A la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}=(v_1,\,\dots,\,v_5)$.

(1). La famille $\mathcal{F}$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$? génératrice de $\mathbb{R}^4$?

(2). Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(3). Soit $b=(b_1,\,\dots,\,b_4)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Quelle(s) est(sont) l'(es) équation(s) de compatibilité du système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 & b_1\\ 1 & 2 & 1 & 4 & 7 & b_2\\ 1 & 3 & 4 & 13 & 8 & b_3\\ 1 & 4 & 2 & 7 & 14 & b_4\end{array}\right)$?

(4). À l'aide des relations précédentes, caractériser alors les éléments de F à l'aide d'une ou plusieurs équations.

(5). Toujours à l'aide de la question **(3)**, déterminer 3 vecteurs u_1, u_2, u_3 vecteurs tels que $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)$.

(6). La famille $\mathcal{G} = (u_1, u_2, u_3)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$?

Pistes de réflexion

(1). L'étude de la liberté est immédiate vu le nombre de vecteurs... Pour le caractère générateur, on pourra s'interresser au rang de la matrice de la famille de vecteurs pour répondre.

(2). La définition de F suffit pour répondre.

(3). On procède à un échelonnement pour faire apparaître les équations de compatibilité de ce système pour lequel on pourra réutiliser à bon escient l'échellonnement réalisé précédemment.

(4). La condition de compatibilité obtenue précédemment traduit exactement les conditions nécessaires pour être un élément de F. Reste à justifier pourquoi en revenant à la définition de ce que c'est qu'être dans F.

(5). La dernière caractérisation de F permet d'obtenir une autre famille génératrice de F plus simple d'ailleurs !

(6). On étudie la liberté de la famille par échelonnement de sa matrice pour en déterminer le rang.