Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2444

Mettre sous forme d'un seul quotient chacune des expressions suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $A(n) = \dfrac{1}{2(n-1)} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2(n+1)}$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{(x-1)^3} + \dfrac{1}{(x-1)^4}$

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\quad q(t) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+t^2}}}}$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2444

1. On a : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{-1, 0, 1\}$,

$$\begin{aligned}
A(n) &= \frac{n(n+1) - 2(n+1)(n-1) + n(n-1)}{2n(n+1)(n-1)} \\
&= \frac{n^2 + n - 2\left(n^2 - 1\right) + n^2 - n}{2n(n+1)(n-1)} \\
&= \frac{2n^2 - 2n^2 + 2}{2n(n+1)(n-1)} \\
&= \frac{2}{2n(n+1)(n-1)} \\
&= \frac{1}{n(n+1)(n-1)}
\end{aligned}$$

2. On a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x-1)^4}{x(x-1)^4} - \frac{x(x-1)^3}{x(x-1)^4} + \frac{x(x-1)^2}{x(x-1)^4} - \frac{x(x-1)}{x(x-1)^4} + \frac{x}{x(x-1)^4} \\
&= \frac{(x-1)^4 - x(x-1)^3 + x(x-1)^2 - x(x-1) + x}{x(x-1)^4} \\
&= \frac{(x-1)\left((x-1)^3 - x(x-1^2 + x(x-1) - x\right) + x}{x(x-1)^4} \\
&= \frac{(x-1)\left(x^3 - 3x^2 + 3x + 1 - x\left(x^2 - 2x + 1\right) + x^2 - x - x\right) + x}{x(x-1)^4} \\
&= \frac{(x-1)\left(x^3 - 2x^2 + x - 1 - x^3 + 2x^2 - x\right) + x}{x(x-1)^4} \\
&= \frac{-(x-1) + x}{x(x-1)^4} \\
&= \frac{1}{x(x-1)^4}
\end{aligned}$$

3. On a : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
q(t) &= \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{1+t^2+1}{1+t^2}}}} \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1+t^2}{2+t^2}}} \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{2t^2+1+t^2}{2+t^2}}} \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{2+t^2}{3+2t^2}} \\
&= \frac{1}{\dfrac{3+2t^2+2+t^2}{3+2t^2}} \\
&= \frac{3+2t^2}{5+3t^2}
\end{aligned}
$$

EX. 2 | Réf. 2445

On considère la fonction polynôme du second degré suivante :

$$f : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-2x+2 \end{array}$$

Expliciter puis simplifier les expressions suivantes :

1. $f(x+1)$ où $x \in \mathbb{R}$;
2. $f(x-1)$ où $x \in \mathbb{R}$;
3. $f(2x+1)$ où $x \in \mathbb{R}$;
4. $f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ où $x \in \mathbb{R}^*$;
5. $f\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ où $x \in \mathbb{R}^*$;
6. $f\left(\dfrac{x-2}{x}\right)$ où $x \in \mathbb{R}^*$;

Pour les trois dernières expressions, on donnera le résultat sous forme d'un quotient.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2445

1. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$
\begin{aligned}
f(x+1) &= (x+1)^2 - 2(x+1) + 2 \\
&= x^2+2x+1-2x-2+2 \\
&= x^2+1
\end{aligned}
$$

2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$
\begin{aligned}
f(x-1) &= (x-1)^2 - 2(x-1) + 2 \\
&= x^2-2x+1-2x+2+2 \\
&= x^2-4x+5
\end{aligned}
$$

3. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$
\begin{aligned}
f(2x+1) &= (2x+1)^2 - 2(2x+1) + 2 \\
&= 4x^2+4x+1-4x-2+2 \\
&= 4x^2+1
\end{aligned}
$$

4. On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$,
$$
\begin{aligned}
f\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(1+\frac{1}{x}\right) + 2 \\
&= 1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-2-\frac{2}{x}+2 \\
&= 1+\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

5. On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$,
$$
\begin{aligned}
f\left(1-\frac{1}{x}\right) &= \left(1-\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(1-\frac{1}{x}\right) + 2 \\
&= 1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-2+\frac{2}{x}+2 \\
&= 1+\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

6. On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$,
$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{x-2}{x}\right) &= \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{x-2}{x}\right. \\
&= \frac{(x-2)^2}{x^2} - \frac{2(x-2)}{x} + \\
&= \frac{x^2-4x+4}{x^2} - \frac{2x-4}{x} \\
&= \frac{x^2-4x+4}{x^2} - \frac{x(2x-}{x^2} \\
&= \frac{x^2-4x+4-x(2x-}{x^2} \\
&= \frac{x^2-4x+4-2x^2+4}{x^2} \\
&= \frac{4-x^2}{x^2}+2 \\
&= \frac{4}{x^2}-1+2 \\
&= 1+\frac{4}{x^2}
\end{aligned}
$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2443

On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ dont on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ la base de vecteurs du plan associée. Les coordonnées des points et vecteurs sont données respectivement dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{B}$.
Soient $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 - 2x + y^2 - 6y - 6 = 0$ et $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(1,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon R.
2. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.
3. Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont sécants.
   On ne demande pas dans cette question de déterminer le(s) point(s) d'intersection.
4. **a.** Justifier que : $M(x,y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 - 16 = 0 \\ x = 1+t \\ y = 1+2t \end{cases}$

   b. Déterminer les valeurs de t qui sont solutions du système précédent.

   c. En déduire alors les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2443

1. On a :
$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 6y - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 \times 1 \times x + y^2 - 2 \times 3 \times y - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 \times 1 \times x + 1^2 - 1^2 + y^2 - 2 \times 3 \times y + 3^2 - 3^2 - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 16 \end{aligned}$$
   Ainsi, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(1,3)$ et de rayon 4.
2. Puisque $\mathcal{D}$ est dirigée par $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et passe par A, on a directement que : $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
3. On commence par déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{D}$. On a :
$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{d} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{d}\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y-1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x-1) - (y-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0 \end{aligned}$$
   et ainsi, une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est : $\mathcal{D} : 2x - y + 1 = 0$.
   Par suite, d'après le cours, la distance de Ω à $\mathcal{D}$ est donc : $d(\Omega, \mathcal{D}) = \dfrac{|2 \times 1 - 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$ c'est à dire $d(\Omega, \mathcal{D}) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$
   et on a clairement $d(\Omega, \mathcal{D}) < 4$.
   Par conséquent, la droite $\mathcal{D}$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points distincts.
4. **a.** On a directement :
$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C} &\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2x + y^2 - 6y - 6 = 0}_{\text{car } M \in \mathcal{C}} \text{ et : } \underbrace{\exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \end{cases}}_{\text{car } M \in \mathcal{D}} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 6y - 6 = 0 \\ x = 1+t \\ y = 1+2t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 - 16 = 0 \\ x = 1+t \\ y = 1+2t \end{cases} \end{aligned}$$

   b. On désigne alors par $\mathcal{S}$ le système d'inconnue le triplet (x,y,t) : $(\mathcal{S}) : \begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 - 16 = 0 \\ x = 1+t \\ y = 1+2t \end{cases}$.

   Ainsi :

$$(x,y,t) \text{ est solution de } (\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-3)^2-16=0 \\ x=1+t \\ y=1+2t \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+t-1)^2+(1+2t-3)^2-16=0 \\ x=1+t \\ y=1+2t \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5t^2-8t-12=0 \\ x=1+t \\ y=1+2t \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{4+2\sqrt{19}}{5} \\ x=1+t \\ y=1+2t \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} t=\dfrac{4-2\sqrt{19}}{5} \\ x=1+t \\ y=1+2t \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des valeurs de t solutions du système $\mathcal{S}$ est : $\left\{\dfrac{4+2\sqrt{9}}{5}, \dfrac{4-2\sqrt{9}}{5}\right\}$.

c. On poursuit simplement la résolution du système pour obtenir :

$$(x,y,t) \text{ est solution de } (\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{4+2\sqrt{19}}{5} \\ x=1+\dfrac{4+2\sqrt{19}}{5} \\ y=1+2\times\dfrac{4+2\sqrt{19}}{5} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} t=\dfrac{4-2\sqrt{19}}{5} \\ x=1+\dfrac{4-2\sqrt{19}}{5} \\ y=1+2\times\dfrac{4-2\sqrt{19}}{5} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{4+2\sqrt{19}}{5} \\ x=\dfrac{9+2\sqrt{19}}{5} \\ y=\dfrac{13+4\sqrt{19}}{5} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} t=\dfrac{4-2\sqrt{19}}{5} \\ x=\dfrac{9-2\sqrt{19}}{5} \\ y=\dfrac{13-4\sqrt{19}}{5} \end{cases}$$

En conclusion les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont les deux points M_1 et M_2 de coordonnées $M_1\left(\dfrac{9+2\sqrt{19}}{5}, \dfrac{13+4\sqrt{19}}{5}\right)$ et $M_2\left(\dfrac{9-2\sqrt{19}}{5}, \dfrac{13-4\sqrt{19}}{5}\right)$.