Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5178

Résoudre l'inéquation $\dfrac{4x^2-4x-3}{18x^2+9x-2} > 0$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 5178

En désignant par P et Q le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{4x^2-4x-3}{18x^2+9x-2}$, on remarque que P et Q sont deux polynômes de degré 2.

- P est un polynôme de degré 2 dont le discriminant Δ vaut $\Delta = 64$ donc qui possède deux racines réelles $\dfrac{3}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$.
- Q est un polynôme de degré 2 dont le discriminant Δ vaut $\Delta = 225$ donc qui possède deux racines réelles $\dfrac{1}{6}$ et $-\dfrac{2}{3}$.

On en déduit alors le signe de l'expression $\dfrac{4x^2-4x-3}{18x^2+9x-2}$:

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $4x^2-4x-3$		$+$	0		$-$		0		$+$		
Signe de $18x^2+9x-2$			$+$		0		$-$		0	$+$	
Signe de $\frac{4x^2-4x-3}{18x^2+9x-2}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Ainsi, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ est : $\mathcal{S} = \left]-\infty; -\dfrac{2}{3}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{6}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$.

EX. 2 | Réf. 5179

Soit $f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{4}\dfrac{8x-5}{x^2-1} \end{array}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}, \quad f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$.
2. En déduire les primitives de f sur les intervalles $I_1 =]-\infty; -1[$, $I_2 =]-1; 1[$ et $I_3 =]1; +\infty[$.
3. Déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I_3 qui s'annule en $x = 2$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5179

1. En réduisant au même dénominateur, il vient : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}, \quad f(x) = \dfrac{a(x-1)+b(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{(a+b)x+(b-a)}{x^2-1}$. Ainsi, par identification des deux numérateurs, il vient les relations : $\begin{cases} a+b=2 \\ a-b=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$. Il s'agit d'un système linéaire 2×2 que

l'on résoud par combinaison pour obtenir : $\begin{cases} a = \dfrac{13}{8} \\ b = \dfrac{3}{8} \end{cases}$. Par suite, on en conclut que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}, \quad f(x) = \dfrac{13}{8(x+1)} + \dfrac{3}{8(x-1)}$.

2. • Sur l'intervalle $I_1 =]-\infty;-1[$, la fonction $x \longmapsto x+1$ est négative, ainsi que la fonction $x \longmapsto x-1$.
Ainsi, en écrivant : $\forall x \in]-\infty;-1[, \quad f(x) = \dfrac{13}{8}\dfrac{-1}{(-(x+1))} + \dfrac{3}{8}\dfrac{-1}{(-(x-1))}$, il vient que les primitives F_1 de f sur I_1 sont les fonctions de la forme : $\forall x \in]-\infty;-1[, \quad F_1(x) = \dfrac{13}{8}\ln(-x-1) + \dfrac{8}{5}\ln(-x+1)$
• Sur l'intervalle $I_2 =]-1;1[$, la fonction $x \longmapsto x+1$ est positive, alors que la fonction $x \longmapsto x-1$ est négative.
Ainsi, en écrivant : $\forall x \in]-1;1[, \quad f(x) = \dfrac{13}{8}\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{3}{8}\dfrac{-1}{(-(x-1))}$, il vient que les primitives F_1 de f sur I_1 sont les fonctions de la forme : $\forall x \in]-\infty;-1[, \quad F_1(x) = \dfrac{13}{8}\ln(x+1) + \dfrac{8}{5}\ln(-x+1)$
• Sur l'intervalle $I_3 =]1;+\infty[$, la fonction $x \longmapsto x+1$ est positive, ainsi que la fonction $x \longmapsto x-1$.
Ainsi, il vient que les primitives F_1 de f sur I_1 sont les fonctions de la forme : $\forall x \in]-\infty;-1[, \quad F_1(x) = \dfrac{13}{8}\ln(x+1) + \dfrac{8}{5}\ln(x-1)$

3. La fonction F étant une primitive de f sur l'intervalle I_3, on sait qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]1;+\infty[, \quad F(x) = \dfrac{13}{8}\ln(x+1) + \dfrac{8}{5}\ln(x-1) + k$.
La condition $F(2) = 0$ se traduit par la relation : $\dfrac{13}{8}\ln(2+1) + \dfrac{8}{5}\ln(2-1) + k = 0$, c'est à dire $\dfrac{13}{8}\ln(2) + k = 0$, d'où $k = -\dfrac{13}{8}\ln(2)$, et par suite : $\forall x \in]1;+\infty[, \quad F(x) = \dfrac{13}{8}\ln(x+1) + \dfrac{8}{5}\ln(x-1) - \dfrac{13}{8}\ln(2)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 5180

Dans cet exercice, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{i},\vec{j}\right)$.
Soient $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ trois droites d'équations respectives :

$$\mathcal{D}_1 : -2x - 3y + 19 = 0, \qquad \mathcal{D}_2 : x + 5y - 20 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_3 : 3x - y - 12 = 0$$

1. Montrer que les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont sécantes en un même point $A(x_A, y_A)$ dont on déterminera les coordonnées.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_4$ qui passe par A et le point $B(3,-1)$.
3. Déterminer deux réels λ et μ tels que $\lambda(-2x-3y+19) + \mu(x+5y-20) = 3x - y - 12$.
4. Faire de même avec l'équation cartésienne de $\mathcal{D}_4$ trouvée à la question précédente.
5. Toutes les droites dont une équation cartésienne est de la forme $\lambda(-2x-3y+19)+\mu(x+5y-20) = 0$ passent-elles par A ? Justifier votre réponse.
6. Quel résultat pourrait-on conjecturer et énoncer à l'issue de cet exercice ?

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 5180

1. • Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux respectifs des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Ils ne sont pas colinéaires puisque $\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right] = -7$ et par conséquent, les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes en un point $A(x_A, y_A)$ dont les coordonnées sont solutions du système $\begin{cases} -2x-3y+19=0 \\ x+5y-20=0 \end{cases}$, que l'on résoud par combinaison pour trouver $x_A = 5$ et $y_A = 3$, ce qui donne $A(5,3)$.
• Le point A appartient à la droite $\mathcal{D}_3$ puisque $3 \times x_A - y_2 - 12 = 3 \times 5 - 3 - 12 = 0$.
Par conséquent, les trois droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont sécantes au point $A(5,3)$.

2. La droite $\mathcal{D}_4$ passe par A et par $B\,(3,-1)$. Elle a donc pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$. Ainsi, $M\,(x,y)\in\mathcal{D}_4 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]=0$. Comme $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-5\\y-3\end{pmatrix}$, il vient $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]=\begin{vmatrix}x-5 & -2\\ y-3 & -4\end{vmatrix}=-4(x-5)-(-2)(y-3)=-4x+2y+14$ et une équation cartésienne de $\mathcal{D}_4$ est $-4x+2y+14=0$, ou encore en simplifiant par -2, $\mathcal{D}_4 :\quad 2x-y-7=0$.
3. On cherche deux réels λ et μ tels que $\lambda(-2x-3y+19)+\mu(x+5y-20)=3x-y-12$.
Puisque $\lambda(-2x-3y+19)+\mu(x+5y-20)=(-2\lambda+\mu)x+(-3\lambda+5\mu)y+19\lambda-20\mu$, en identifiant cette expression avec $3x-y-12$, il vient les relations : $\left\{\begin{array}{l}-2\lambda+\mu=3\\-3\lambda+5\mu=-1\\19\lambda-20\mu=-12\end{array}\right.$.
On résoud le système formé par les deux premières équations $\left\{\begin{array}{l}-2\lambda+\mu=3\\-3\lambda+5\mu=-1\end{array}\right.$ par combinaison pour trouver $\lambda=-\dfrac{16}{7}$ et $-\mu=\dfrac{11}{7}$, et on vérifie que ces deux valeurs satisfont la troisième relation, ce qui est le cas puisque $19\times\left(-\dfrac{19}{7}\right)-20\left(-\dfrac{11}{7}\right)=-12$.
Ainsi, on a : $\quad -\dfrac{16}{7}\,(-2x-3y+19)-\dfrac{11}{7}\,(x+5y-20)=3x-y-12$.
4. Sur le même principe, on trouverait que : $\quad -\dfrac{11}{7}\,(-2x-3y+19)-\dfrac{8}{7}\,(x+5y-20)=2x-y-7$.
5. Puisque A est le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, ses coordonnées vérifient chacune des deux équations cartésiennes de ces droites. Ainsi, en reportant les coordonnées de A dans l'expression $\lambda(-2x-3y+19)+\mu(x+5y-20)$, on obtient clairement $\lambda\underbrace{(-2x-3y+19)}_{=0}+\mu\underbrace{(x+5y-20)}_{=0}=0$, et donc A appartient aux droites dont une équation cartésienne est de la forme $\lambda(-2x-3y+19)+\mu(x+5y-20)=0$.
6. On peut conjecturer le résultat suivant : « toute droite qui passe par le point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ a une équation cartésienne de la forme $\lambda(-2x-3y+19)+\mu(x+5y-20)=0$ et réciproquement ».