Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 3742

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ m & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Discuter de l'injectivité de f suivant m.

2. Dans tous les cas, donner le rang de f, une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 3742

1. On sait que f est injective si, et seulement si, son noyau est réduit au vecteur nul. Puisque f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$, c'est donc équivalent à dire que f est injective si, et seulement si, $\mathrm{rg}\,(f) = 4$.

Or on a : $A \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1+m & -1-m & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et ainsi on a : $(\mathrm{rg}\,(f) = 4) \quad \Leftrightarrow \quad (m \neq 1$ et $m \neq -1)$.

On en conclut que : $\quad (f est$injective$) \quad \Leftrightarrow \quad (m \in \{-1, 1\})$.

2. On notera $\mathcal{B}_4 = \left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_4}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On procède à un échelonnement en colonnes de la matrice A pour obtenir une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ dans chacun des cas :

Si $m = 1$ **:** alors $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{\sim_C} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_2}{\sim_C} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_4 \leftrightarrow C_3}{\sim_C} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On en déduit donc que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,((1,1,1,0),(0,2,0,0),(0,0,0,1))$ qui est une famille de 3 vecteurs de $\mathrm{Im}\,(f)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est échelonnée, donc est libre, ce qui donne une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Ainsi, on a $\mathrm{rg}\,(f) = 3$ et d'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 1$.

On remarque par ailleurs en suivant les opérations sur les colonnes que : $\quad f\left(\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_2}\right) = \overrightarrow{0}$.

On en déduit donc que $\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_2} \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et puisque $\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_2} \neq \overrightarrow{0}$ et que $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 1$, il vient $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\,((0,1,1,0))$.

Si $m = -1$ **:** alors $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + C_2 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{\sim_C} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_3 \leftarrow C_2 \\ \text{puis} C_3 \leftarrow C_4}}{\sim_C} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ On en déduit donc que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,((1,-1,1,0),(0,0,-2,0),(0,0,0,1))$ qui est une famille de 3 vecteurs de $\mathrm{Im}\,(f)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est échelonnée, donc est libre, ce qui donne une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Ainsi, on a $\mathrm{rg}\,(f) = 3$ et d'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 1$.

On remarque par ailleurs en suivant les opérations sur les colonnes que : $\quad f\left(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right) = \overrightarrow{0}$.

On en déduit donc que $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \in \operatorname{Ker}(f)$ et puisque $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \neq \overrightarrow{0}$ et que $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 1$, il vient $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}((1,1,0,0))$.

Si $m \notin \{-1,1\}$: on sait que dans ce cas $\operatorname{rg}(f) = 4$, donc d'après la caractérisation des endomorphismes bijectifs, on en déduit que f est un automorphisme et dans ce que $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^4$ et $\operatorname{Ker}(f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 3743

Dans tout cet exercice, m désigne un réel et on note $A(m)$ la matrice $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 1-m \end{pmatrix}$

On désignera par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $A(m)$.

On note par ailleurs $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On suppose dans cette question que $m = 1$.

a. Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

b. Calculer, pour tout n entier naturel non nul $(A(1))^n$.

2. Dans toute la suite de l'exercice on suppose que $m \neq 1$.

a. Justifier le fait que $A(m)$ est inversible.

b. Déterminer deux réels a et b dépendants de m tels que l'on ait $(A(m))^2 = aA(m) + b\mathrm{I}_3$.

c. En déduire une expression de $(A(m))^{-1}$ en fonction de $A(m)$ et de I_3, puis expliciter les coefficients de $(A(m))^{-1}$ en fonction de m.

3. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer J^2.

b. En déduire J^k en fonction de J et de k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

c. Exprimer $A(m)$ en fonction de I_3, J et m.

d. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad (A(m))^n = \mathrm{I}_3 + (1-(1-m)^n) J$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 3743

Dans toute la suite, on note $\mathcal{B}_3 = \left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_3}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. a. Puisqu $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Par suite, $\operatorname{rg}(A(1)) = 1$, donc $rg(f) = 1$ et ainsi $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e_1}\right)$.

Ainsi, d'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 2$.

De plus, on remarque que $f\left(\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1}\right) = \overrightarrow{0}$ et $f\left(\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}\right) = \overrightarrow{0}$. Donc $\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{1} \in \operatorname{Ker}(f)$ et $\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1} \in \operatorname{Ker}(f)$. Ces deux vecteurs sont non nuls non colinéaires. Ils forment donc une famille libre de deux vecteurs de $\operatorname{Ker}(f)$ qui est lui-même de dimension 2, et par conséquent forment une base de $\operatorname{Ker}(f)$. Ainsi $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}\right)$.

b. On remarque que $A(1)^2 = A(1)$. Un raisonnement par récurrence sur n permettrait alors de montrer que $(A(1))^n = A(1)$.

2. a. La matrice $A(m)$ étant triangulaire supérieure, elle est inversible si, et seulement si, tous ses termes diagonaux sont non nuls. Or puisque $m \neq 1$ c'est le cas. Donc $A(m)$ est inversible.

b. Un calcul direct donne que $(A(m))^2 = \begin{pmatrix} m^2 & m & m \\ 0 & (1-m)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-m)^2 \end{pmatrix}$

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a : $aA(m) + b\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} a+b & am & am \\ 0 & a(1-m)+b & 0 \\ 0 & 0 & a(1-m)+b \end{pmatrix}$.

Donc par identification des coefficients pour obtenir la décomposition voulue, il est nécessaire que (a,b) soit tel que $\begin{cases} a+b = m^2 \\ a(1-m)+b = (1-m)^2 \end{cases}$ ce qui donne $a = 2-m$ et $b = m-1$.

Réciproquement, on vérifie directement que $(2-m)A(m) + (m-1)\,\mathrm{I}_3 = (A(m))^2$.

c. On en déduit donc que : $A(m)\,(A(m) - (m-2)\mathrm{I}_3) = (m-1)\,\mathrm{I}_3$.

Si $m = 1$ **:** on sait déjà que $A(1)$ n'est pas inversible puisque ses trois colonnes sont liées.

Si $m \neq 1$ **:** alors $A(m)\left(\dfrac{1}{m-1}A(m) - \dfrac{m-2}{m-1}\mathrm{I}_3\right) = \mathrm{I}_3$

Ainsi $A(m)$ est inversible d'inverse $\dfrac{1}{m-1}A(m) - \dfrac{m-2}{m-1}\mathrm{I}_3$.

3. a. On trouve directement que $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c'est à dire $J^2 = -J$.

b. De même, on obtient directement que $J^3 = J$ Par suite, on a clairement que : $\forall p \in \mathbb{N},\quad J^{2p} = -J \quad$ et $\quad J^{2p+1} = J$.

c. On a directement que $A(m) = \mathrm{I}_3 + mJ$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\mathrm{I}_3.\,(mJ) = (mJ)\,.\mathrm{I}_3$, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour obtenir que :

$$\begin{array}{rcl}
(A(m))^n & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{I}_3)^{n-k} (mJ)^k \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m^k J^k \\
& = & \mathrm{I}_3 + \left(\displaystyle\sum_{1 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} m^{2p} J^{2p}\right) + \left(\displaystyle\sum_{1 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} m^{2p+1} J^{2p+1}\right) \\
& = & \mathrm{I}_3 + \left(\displaystyle\sum_{1 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} m^{2p} (-J)\right) + \left(\displaystyle\sum_{1 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} m^{2p+1} J\right) \\
& = & \mathrm{I}_3 + \left(-\displaystyle\sum_{1 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} m^{2p}\right) + \left(\displaystyle\sum_{1 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} m^{2p+1}\right) J \\
& = & \mathrm{I}_3 - \left(\displaystyle\sum_{1 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} m^{2p}\right) - \left(\displaystyle\sum_{1 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} m^{2p+1}\right) J \\
& = & \mathrm{I}_3 - \left(\displaystyle\sum_{1 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} (-1)^{2p} m^{2p}\right) + \left(\displaystyle\sum_{1 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} (-1)^{2p+1} m^{2p+1}\right) J \\
& = & \mathrm{I}_3 - \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} m^k\right) J \\
& = & \mathrm{I}_3 - \left(\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m^k\right) - 1\right) J \\
& = & \mathrm{I}_3 - ((1-m)^n - 1)\, J \\
& = & \mathrm{I}_3 + (1 - (1-m)^n)\, J
\end{array}$$