Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 1368

On désigne par $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on considère $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Dans tout l'exercice on notera $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Exprimer A^2 en fonction de A et de I_3.
En déduire que la matrice A est inversible, et déterminer alors A^{-1}.

2. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

3. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$ et $v_3 = (0, 1, -1)$, est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 1368

1. On a directement que :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \mathrm{I}_3 \\ &= 2A - \mathrm{I}_3 \end{aligned}$$

On en déduit donc que : $2A - A^2 = \mathrm{I}_3$ c'est à dir que : $A\left(2\mathrm{I}_3 - A\right) = \mathrm{I}_3$.
Il existe donc une matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \times B = \mathrm{I}_3$. Par théorème la matrice A est donc inversible, avec $A^{-1} = 2\mathrm{I}_3 - A$.

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. f est d'après l'énoncé, un endomorphisme. Il suffit de montrer que f est bijectif pour que f soit un automorphisme.
Or le théorème de caractérisation des endomorphismes bijectifs donne :

$$\left(f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right) \text{ est bijectif} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{GL}_3\left(\mathbb{R}\right) \right)$$

On a ici : $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A \in \mathrm{GL}_3\left(\mathbb{R}\right)$.
Par suite, on en déduit que f est un endomorphisme bijectif, et ainsi que c'est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

3. La famille $\mathcal{C}$ étant un famille de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, le théorème de caractérisation des bases en dimension finie par leur représentation matricielle donne :

$$\left(\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{C}\right) \in \mathrm{GL}_3\left(\mathbb{R}\right) \right)$$

Par définition : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{C}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Or : $\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})\right) \Leftrightarrow \left(\operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})) = 3\right)$
Un échelonnement en ligne donne que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice étant échelonnée sous forme d'une matrice triangulaire supérieure avec tous ses termes diagonaux non nuls, elle est donc de rang 3, et par suite la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est inversible.
Par suite, on en déduit que la famille $\mathcal{C}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

4. On sait que : $\left(f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{y}\right) \Leftrightarrow \left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{x}\right) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{y}\right)\right)$

Calcul de $f(v_1)$: puisque $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, il vient : $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, c'est à dire $f(v_1) = v_1$.

Calcul de $f(v_2)$: puisque $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, il vient : $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c'est à dire $f(v_2) = v_2$.

Calcul de $f(v_3)$: puisque $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, il vient : $A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, c'est à dire $f(v_3) = v_2 + v_3$.

On en déduit donc que : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1368

EX. 2 | Réf. 0418

Dans tout ce qui suite, on désigne par A la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
On considère alors $T : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MA - AM \end{array}\right.$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice de T dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. T est-il un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 0418

1. Par théorème :

$$\left(\begin{array}{c} f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \text{est linéaire} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\left\{\begin{array}{ccc} \forall M & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \forall N & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \forall \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array}\right., f(\lambda N + N) = \lambda f(N) + f(N)\right)$$

Soient alors $\left\{\begin{array}{ccc} M & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ N & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array}\right.$.

On pose $R = \lambda M + N$

Par définition de f, on a alors : $$\begin{aligned} T(R) &= RA - AR \\ &= (\lambda M + N) \times A - A \times (\lambda M + N) \\ &= \lambda MA + NA - \lambda AM - AN \\ &= \lambda \underbrace{(MA - AM)}_{=f(M)} + \underbrace{NA - AN}_{=f(N)} \\ &= \lambda T(M) + T(N) \end{aligned}$$

et ainsi T est une application linéaire.

Ainsi, T est une application linéaire de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. C'est donc un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On désigne par $\mathcal{B} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}} \right)$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Par définition, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(T\left(E_{11}\right), T\left(E_{21}\right), T\left(E_{12}\right), T\left(E_{22}\right)\right)$.

Calcul de $T\left(E_{11}\right)$ on a : $$\begin{aligned} T\left(E_{11}\right) &= E_{11}A - AE_{11} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcul de $T\left(E_{12}\right)$ on a : $$\begin{aligned} T\left(E_{12}\right) &= E_{12}A - AE_{12} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcul de $T\left(E_{21}\right)$ on a : $$\begin{aligned} T\left(E_{21}\right) &= E_{21}A - AE_{21} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcul de $T\left(E_{22}\right)$ on a : $$\begin{aligned} T\left(E_{22}\right) &= E_{22}A - AE_{22} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, il vient : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. D'après le théorème de caractérisation des endomorphismes bijectifs, puisque $\dim\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\right) = 4$: on a :

$$\left(T \in \mathcal{L}\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\right) \text{ est bijectif} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}) \right)$$

Or : $\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}) \right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T)\right) = 4 \right)$.

Un échelonnement en lignes donne :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2}L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 1L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T)$ est de rang 2, et par suite l'endomorphisme T n'est pas bijectif, et ce n'est donc pas un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 0443

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est **unipotente** lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $(A - \mathrm{I}_n)^p = (0)$
Soit alors A une matrice unipotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est inversible.

2. Montrer que A^{-1} est unipotente.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que A^k est unipotente.

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 0443

EX. 5 | Éléments de correction | Réf. 0443

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 4570

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$.

2. f est-il surjectif ?

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

4. A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$?

EX. 6 | Éléments de correction | Réf. 4570

1. Par définition, on a : $\left(M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \operatorname{Ker}(f)\right) \Leftrightarrow (AM=(0))$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 2a+4c & 2b+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a+2c=0\\ b+2d=0\\ 2a+4c=0\\ 2b+d=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}(a,b,c,d) \text{ est solution du système}\\ \text{de représentation matricielle}\\ \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&0&0\\0&1&0&2&0\\2&0&4&0&0\\0&2&0&4&0\end{array}\right)\end{array}\right)$$

On résout ce dernier par échelonnement en lignes :

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&0&0\\0&1&0&2&0\\2&0&4&0&0\\0&2&0&4&0\end{array}\right) \underset{L_3\leftarrow L_3-2L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&0&0\\0&1&0&2&0\\0&0&0&0&0\\0&2&0&4&0\end{array}\right) \underset{L_4\leftarrow L_4-2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&0&0\\0&1&0&2&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

On en déduit alors que : $\left(M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \operatorname{Ker}(f)\right) \Leftrightarrow \left(M=\begin{pmatrix}-2c & -2d\\ c & d\end{pmatrix},\ (c,d)\in\mathbb{R}^2\right)$

$$\Leftrightarrow \left(M\in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-2\\0&1\end{pmatrix}\right)\right)$$

On en déduit que : $\operatorname{Ker}(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-2\\0&1\end{pmatrix}\right)$.

2. De la question précédente, on en déduit que $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 2$. D'après le théorème du rang, on a : $\underbrace{\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))}_{=4} = \underbrace{\dim(\operatorname{Ker}(f))}_{=2} + \operatorname{rg}(f)$

On en déduit donc que $\operatorname{rg}(f)=2$.

L'application linéaire f étant à valeurs dans un espace de dimension 4, elle est surjective si, et seulement si, son rang est égal à 4. Or ce n'est pas le cas.

f n'est pas surjective.

3. En notant $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{\substack{1\le i\le 2\\ 1\le j\le 2}}$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on sait que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}))$.

Or on a : $f(E_{11})=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}$, $f(E_{12})=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$, $f(E_{21})=\begin{pmatrix}2&0\\4&0\end{pmatrix}$ et $f(E_{22})=\begin{pmatrix}0&2\\0&4\end{pmatrix}$.

Par suite on en déduit que : $\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Vect}(f(E_{11}), f(E_{12}))$ les deux vecteurs étant clairement non nuls et non colinéaires, donc formant une base de $\operatorname{Im}(f)$.

4. Puisque $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace de dimension finie, on a : $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})=\operatorname{Ker}(f)\oplus\operatorname{Im}(f)) \Leftrightarrow \begin{cases}\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))=\dim(\operatorname{Ker}(f))+\dim(\operatorname{Im}(f))\\ \operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Im}(f)=\{(0)\}\end{cases}$

D'après les questions précédentes, on a déjà : $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))=\dim(\operatorname{Ker}(f))+\dim(\operatorname{Im}(f))$.

Montrons alors que $\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Im}(f)=\{(0)\}$.

Inclusion $\{(0)\}\subset\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Im}(f)$: $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ étant deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, leur intersection est encore un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et contient donc le vecteur nul. D'où l'inclusion annoncée.

Inclusion $\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Im}(f)\subset\{(0)\}$: soit alors $M\in\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Im}(f)$.

Puisque $M\in\operatorname{Ker}(f)$, il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $M=\alpha\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&-2\\0&1\end{pmatrix}$.

Puisque $M\in\operatorname{Im}(f)$, il existe $(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$ tel que que $M=\gamma\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$.

Par identification des coefficients des matrices ainsi écrites, on en déduit donc que $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ est solution du système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} -2\alpha = \gamma \\ -2\beta = 2\delta \\ \alpha = 2\gamma \\ \beta = 4\delta \end{cases}$ qui donne dirtectement que $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0, 0, 0, 0)$.

Par suite $M = (0)$, et on a l'inclusion annoncée.

On en déduit que $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \{(0)\}$, et finalement que $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 3744

On rappelle que $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On définit les deux fonctions ch et sh appelées respectives cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique par :

$$\mathrm{ch} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \mathrm{sh} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

On note alors $H = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{ch}\,, \mathrm{sh}\,)$ et $F = \{f \in H,\ f(\ln(2)) = 0\}$.

1. Déterminer la dimension de H.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H.
3. Déterminer une base et la dimension de F.
4. Soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ f & \longmapsto & (f(-\ln(2)), f(\ln(2))) \end{array} \right.$. Montrer que φ est un isomorphisme.

EX. 7 | Éléments de correction | Réf. 3744

1. H est un sous-espace de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par construction et même que H est de dimension finie inférieure ou égale à 2 car engendré par deux vecteurs.
   Montrons que la famille $(x \longmapsto \mathrm{ch}\,(x), x \longmapsto \mathrm{sh}\,(x))$ est une famille libre.
   Supposons donc que $\alpha\mathrm{ch}\, + \beta\mathrm{sh}\, = \tilde{0}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, c'est à dire que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R},\quad \alpha\mathrm{ch}\,(x) + \beta\mathrm{sh}\,(x) = 0$.
   En particulier, il vient que $\alpha\mathrm{ch}\,(0) + \beta\mathrm{sh}\,(0) = 0$ c'est à dire $\alpha = 0$.
   Par suite : $\forall x \in \mathbb{R},\quad \beta\mathrm{sh}\,(x) = 0$.
   Or puisque $\mathrm{sh}\,(1) = \dfrac{\mathrm{e}^{1} - \mathrm{e}^{-1}}{2} \neq 0$, il vient que $\beta = 0$.
   Par conséquent, $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. Donc la famille $(\cos, \mathrm{sh}\,)$ est une famille libre.
   Finalement, H est engendré par deux vecteurs qui forment une famille libre. Cette famille est donc une base de H et puisqu'elle est formée de deux vecteurs, on obtient que $\dim(H) = 2$.
2. **$F \subset H$:** par construction ;
   $\tilde{0} \in F$: en effet, $\tilde{0}(\ln(2)) = 0$ donc $\tilde{0} \in F$
   Stabilité par combinaison linéaire : Soient $(f_1, f_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $f_3 = \lambda f_1 + f_2$.
   Alors : $\begin{array}{rcl} f_3(\ln(2)) & = & (\lambda f_1 + f_2)(\ln(2)) \\ & = & (\lambda f_1)(\ln(2)) + f_2(\ln(2)) \\ & = & \lambda \underbrace{f_1(\ln(2))}_{=0 \text{car } f_1 \in F} + \underbrace{f_2(\ln(2))}_{=0 \text{ car } f_2 \in F} \\ & = & 0 \end{array}$ et donc $f_3 \in F$ ce qui assure la statbilité de F par combinaison linéaire.
   On en déduit donc que F est bien un sous-espace vectoriel de H.
3. Puisque F est un sous-espace vectoriel de H, il est de dimension au plus 2.

$$\begin{aligned}
(f \in F) \quad & \Leftrightarrow \quad \left(\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f = \alpha \mathrm{ch} + \beta \mathrm{sh} \\ f(\ln(2)) = 0 \end{cases}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \left(\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha \mathrm{ch}(x) + \beta \mathrm{sh}(x) \\ f(\ln(2)) = 0 \end{cases}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \left(\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha \mathrm{ch}(x) + \beta \mathrm{sh}(x) \\ \frac{5}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta = 0 \end{cases}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \left(\exists \beta \in \mathbb{R}, f = \beta \left(-\frac{3}{5}\mathrm{ch} + \mathrm{sh}\right)\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \left(f \in \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto -\frac{3}{5}\mathrm{ch} + \mathrm{sh}\right)\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\dim(F) = 1$ et que $F = \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto -\frac{3}{5}\mathrm{ch} + \mathrm{sh}\right)$.

4. **Caractère linéaire de Φ :** soient $(f_1, f_2) \in H \times H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $f_3 = \lambda f_1 + f_2$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(f_3) &= (f_3(-\ln(2)), f_3(\ln(2))) \\
&= ((\lambda f_1 + f_2)(-\ln(2)), (\lambda f_1 + f_2)(\ln(2))) \\
&= ((\lambda f_1)(-\ln(2)) + f_2(-\ln(2)), (\lambda f_1)(\ln(2)) + f_2(\ln(2))) \\
&= (\lambda f_1(-\ln(2)) + f_2(-\ln(2)), \lambda f_1(\ln(2)) + f_2(\ln(2))) \\
&= (\lambda f_1(-\ln(2)), \lambda f_1(\ln(2))) + (f_2(-\ln(2)), f_2(\ln(2))) \\
&= \lambda (f_1(-\ln(2)), f_1(\ln(2))) + (f_2, (-\ln(2)))\, f_2(\ln(2)), \\
&= \lambda \varphi(f_1) + \varphi(f_2)
\end{aligned}$$

et par suite φ est bien linéaire.

On obtient donc : $\varphi(\mathrm{ch}) = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$ et $\varphi(\mathrm{sh}) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$.

En notant $\mathcal{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on en déduit que $\mathrm{Mat}_{(\mathrm{ch}, \mathrm{sh}), \mathcal{B}_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ qui est clairement de rang 2 puisque ses colonnes ne sont pas proportionnelles.

Par suite, φ est une application linéaire de rang 2 entre deux espaces de dimension 2. D'après le théorème de caractérisation des isomorphismes, φ est un isomorphisme.