À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [4765] | 1| Covariance et indépendance

On considère deux variables aléatoires X et Y réelles fineis dont la loi de couple est la loi uniforme sur l'ensemble $\{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}$.

(1). Préciser les lois marginales des variables aléatoires X et Y.

(2). Calculer la covariance des variables X et Y. Qu'en conclure ?

(3). Vérifier que les variables aléatoires $U = X + Y$ et $V = X - Y$ sont indépendantes.

Éléments de correction

(1). Compte-tenu des valeurs prises par le couple (X, Y), on en déduit que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$. Par suite, (X, Y) suivant une loi uniforme, on en déduit le tableau de loi conjointe et les lois marginales :

X \ Y	-1	0	1	Loi de X
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

(2). X et Y étant à support fini, on peut écrire que $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Par ailleurs, par définition : $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-1) \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} \\ &= 0\end{aligned}$$

et de même : $$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= (-1) \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} \\ &= 0\end{aligned}$$

et on a : $$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= (-1) \times (-1) \times 0 + (-1) \times 0 \times \frac{1}{4} + (-1) \times 1 \times 0 \\ &\quad +0 \times (-1) \times \frac{1}{4} + 0 \times 0 \times 0 + 0 \times 1 \times \frac{1}{4} \\ &\quad +1 \times (-1) \times 0 + 0 \times 0 \times \frac{1}{4} + 0 \times 1 \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

ce qui donne $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Par ailleurs, on remarque que $\mathbb{P}([X=0]) \times \mathbb{P}([X=0]) = \frac{1}{4}$ et que $\mathbb{P}([X=0] \cap [Y=0]) = 0$ ce qui donne que $\mathbb{P}([X=0] \cap [Y=0]) \neq \mathbb{P}([X=0]) \times \mathbb{P}([Y=0])$, et par suite que X et Y ne sont pas indépendantes.

(3). Tout d'abord, compte-tenu des valeurs prises par X et Y, on en déduit que $U(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $V(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([U=-2]) &= \mathbb{P}([X=-1]\cap[Y=-1])\\ &= 0\\ \mathbb{P}([U=-1]) &= \mathbb{P}([X=-1]\cap[Y=0])\\ &\quad +\mathbb{P}([X=0]\cap[Y=-1])\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{2}\\ \mathbb{P}([U=0]) &= \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=0])\\ &\quad +\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=-1])\\ &\quad +\mathbb{P}([X=-1]\cap[Y=1])\\ &= 0+0+0\\ &= 0\\ \mathbb{P}([U=1]) &= \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=0])\\ &\quad +\mathbb{P}([X=0]\cap[Y=1])\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{2}\\ \mathbb{P}([U=2]) &= \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1])\\ &= 0+0\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([V=-2]) &= \mathbb{P}([X=-1]\cap[Y=1])\\ &= 0\\ \mathbb{P}([V=-1]) &= \mathbb{P}([X=-1]\cap[Y=0])\\ &\quad +\mathbb{P}([X=0]\cap[Y=1])\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{2}\\ \mathbb{P}([V=0]) &= \mathbb{P}([X=-1]\cap[Y=-1])\\ &\quad +\mathbb{P}([X=0]\cap[Y=0])\\ &\quad +\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1])\\ &= 0+0+0\\ &= 0\\ \mathbb{P}([V=1]) &= \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=0])\\ &\quad +\mathbb{P}([X=0]\cap[Y=-1])\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{2}\\ \mathbb{P}([V=2]) &= \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=-1])\\ &= 0+0\\ &= 0\end{aligned}$$

Ce qui permet finalement de dire que U et V suivent toutes les deux la loi uniforme sur $\{-1,1\}$.
Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([U=1])\times\mathbb{P}([V=1]) &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{4}\\ \mathbb{P}([U=1]\cap[V=1]) &= \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=0])\\ &= \frac{1}{4}\\ \mathbb{P}([U=1])\times\mathbb{P}([V=-1]) &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{4}\\ \mathbb{P}([U=1]\cap[V=-1]) &= \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=1])\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([U=-1])\times\mathbb{P}([V=1]) &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{4}\\ \mathbb{P}([U=-1]\cap[V=1]) &= \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=-1])\\ &= \frac{1}{4}\\ \mathbb{P}([U=-1])\times\mathbb{P}([V=-1]) &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{4}\\ \mathbb{P}([U=-1]\cap[V=-1]) &= \mathbb{P}([X=-1]\cap[Y=0])\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

et ainsi, U et V sont bien indépendantes.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [1033] | 2| Étude d'un endomorphisme

On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -m & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1). Montrer que $e_1 + e_4 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $me_1 + e_3 \in \mathrm{Ker}(f)$.

(2). Quel est le rang de f ? Justifier votre réponse.

(3). Déterminer alors une base $\mathcal{B}_k$ de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base $\mathcal{B}_I$ de $\mathrm{Im}(f)$.

(4). Vérifier que : $\left(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right) \Leftrightarrow (m \neq 0)$

(5). Dans cette question $m = 0$.
On rappelle que l'on note $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\substack{f \text{ composée } p \text{ fois} \\ \text{avec elle même}}}$.
Déterminer le plus petit $p \in \mathbb{N}^*$ possible tel que $\mathrm{Ker}(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Éléments de correction

Dans toute la suite, on note $E_1, \ldots E_4$ les représentations matricielles des vecteurs $e_1, \ldots e_4$, et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

(1). Par définition de $\mathrm{Ker}(f)$, on a que : $(e_1 + e_4 \in \mathrm{Ker}(f)) \Leftrightarrow \left(f(e_1 + e_4) = \overrightarrow{0}\right)$. Par linéarité de f, cela revient à montrer que $f(e_1) + f(e_4) = \overrightarrow{0}$.
Matriciellement, cela se traduit par le calcul de $A(E_1 + E_2) = AE_1 + AE_4$ qui vaut après calcul la matrice colonne nulle. Par conséquent $e_1 + e_4 \in \mathrm{Ker}(f)$.
Un raisonnement analogue permet de montrer que $me_1 + e_3 \in \mathrm{Ker}(f)$.

(2). Les deux premières colonnes de la matrice A sont clairement linéairement indépendantes, donc nécessairement $\mathrm{rg}(f) \geq 2$. Mais la question précédente nous donne deux vecteurs de $\mathrm{Ker}(f)$ aussi linéairement indépendants, donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq 2$ aussi. Par le théorème du rang, puisque $\underbrace{\dim(\mathbb{R}^4)}_{=4} = \underbrace{\mathrm{rg}(f)}_{\geq 2} + \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f))}_{\geq 2}$, il vient que $\mathrm{rg}(f) = 2$.

(3). Puisque $\mathrm{rg}(f) = 2$, il vient alors que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ d'après le théorème du rang précédemment cité. Ainsi, les deux vecteurs $e_1 + e_4$ et $me_1 + e_3$ étant non nuls non colinéaires, ils forment une famille libre de 2 vecteurs dans un espace de dimension 2 et forment alors par théorème une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
Puisque $\mathrm{rg}(f) = 2$ et que les deux premières colonnes de la matrice A sont indépendantes, les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ forment une famille de deux vecteurs non nuls non colinéaires, donc libre dans un espace de dimension 2. Cela en est donc une base.

(4). Soit $u \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Alors $u = x(e_1 + e_4) + y(me_1 + e_3)$ et $u = ze_3 + t(-e_1 + me_2 + e_4)$, donc par identification, on a le système $\begin{cases} x + my + t = 0 \\ -mt = 0 \\ y - z = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$. Si $m \neq 0$, on trouve $u = \overrightarrow{0}$. En revanche, si $m = 0$, on trouve des solutions u non nulles puisque le rang du système linéaire est au plus 3.

(5). Si $m = 0$, alors $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a que $\mathrm{Im}\ (f^2) = \mathrm{Vect}\ (e_2)$ et $\mathrm{Ker}\ (f^2) = \mathrm{Vect}\ (e_1, e_3, e_4)$ de sorte que $\mathrm{Ker}\ (f^2) \cap \mathrm{Im}\ (f^2) \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
$f^3 = \tilde{0}$, donc $\mathrm{Ker}\ (f^3) = \mathbb{R}^4$ et $\mathrm{Im}\ (f^3) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, et ces sous-espaces vectoriels ont une intersection non nulle, donc $p = 3$ convient.