À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [2787] | 1| Trigonométrie

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)$

puis que : $\cos^4(x) + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \frac{2\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}$

Éléments de correction

On utilise $\cos^2(x) = \frac{\cos 2x + 1}{2}$ et $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ pour obtenir que $\cos^4(x) = \frac{1 + \cos^2(2x) + 2\cos 2x}{4}$ ainsi que : $\sin^4(x) = \frac{1 + \cos^2(2x) - 2\cos 2x}{4}$ d'où le premier résultat.

Ensuite, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ d'où en transformant $\cos^4\left(x + \frac{2\pi}{4}\right) = \sin^4(x)$ et $\cos^4\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ on en déduit :

$$S = 1 - \frac{\sin^2(2x)}{2} + 1 - \frac{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Exercice| [4798] | 2| Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y - z + t = 0\right\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Éléments de correction

F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$: par définition de F

$\overrightarrow{0} = (0, 0, 0, 0)$ appartient à F : en effet, on a $0 - 0 - 0 + 0 = 0$ ce qui assure que $\overrightarrow{0} \in F$.

Stabilité de F par combinaison linéaire : soient $u = (x, y, z, t) \in F$, $v = (x', y', z', t') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Posons $w = \lambda u + v$ avec $w = (x'', y'', z'', t'')$.

Montrons que $w \in F$, c'est à dire que $x'' - y'' - z'' + t'' = 0$.

Par définition de w, on a : $\begin{cases} x'' = \lambda x + x' \\ y'' = \lambda y + y' \\ z'' = \lambda z + z' \\ t'' = \lambda t + t' \end{cases}$.

Ainsi, il vient que :

$$\begin{aligned} x'' - y'' - z'' + t'' &= \lambda x + x' - (\lambda y + y') - (\lambda z + z') + \lambda t + t' \\ &= \lambda \underbrace{(x - y - z + t)}_{=0 \text{ car } u \in F} + \underbrace{x' - y' - z' + t'}_{=0 \text{ car } v \in F} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc $w \in F$.

Conclusion : F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4797] | 3| Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

On considère $F = \text{Vect}\,(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ où :

$$v_1 = (1,1,1,1)\,, \quad v_2 = (1,2,3,4)\,, \quad v_3 = (3,1,4,2)\,, \quad v_4 = (10,4,13,7) \quad v_5 = (1,7,8,14)$$

et on note A la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_5)$.

(1). La famille $\mathcal{F}$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$? génératrice de $\mathbb{R}^4$?

(2). Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(3). Soit $b = (b_1, \ldots, b_4)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Quelle(s) est(sont) l'(es) équation(s) de compatibilité du système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 7 & b_2 \\ 1 & 3 & 4 & 13 & 8 & b_3 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 14 & b_4 \end{array}\right)$?

(4). À l'aide des relations précédentes, caractériser alors les éléments de F à l'aide d'une ou plusieurs équations.

(5). Toujours à l'aide de la question **(3)**, déterminer 3 vecteurs u_1, u_2, u_3 vecteurs tels que $F = \text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)$.

(6). La famille $\mathcal{G} = (u_1, u_2, u_3)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$?

Éléments de correction

(1). La famille $\mathcal{F}$ étant une famille de $\mathbb{R}^4$ qui posséde 5 vecteurs, par théorème, elle ne peut pas être libre.
Par ailleurs, $\mathcal{F}$ étant une famille de $\mathbb{R}^4$, par théorème, on sait que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ si, et seulement si, le rang de sa matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 13 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 14 \end{pmatrix}$ est égal à 4.
On procède alors à un échelonnement en lignes de la matrice A pour en déterminer le rang.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 13 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 14 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -5 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2). Par définition de F, F est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$, donc est par théorème, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(3). On procède donc à un échelonnement en lignes de ce système, étant entendu que l'on peut reprendre la suite des opérations réalisées lors de l'échelonnement de la matrice A de la famille $\mathcal{F}$ pour la recherche de rang, puisqu'il est clair que la matrice de ce système est exactement la matrice A.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 7 & b_2 \\ 1 & 3 & 4 & 13 & 8 & b_3 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 14 & b_4 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 & 6 & b_2 - b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 7 & b_3 - b_1 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 13 & b_4 - b_1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 & 6 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -5 & b_3 - 2b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -5 & b_4 - 3b_1 + 2b_1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 & 6 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -5 & b_3 - 2b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & b_4 - b_3 - b_2 + b_1 \end{array}\right)$$

La dernière ligne de ce système donne une équation de compatibilité de la forme « $0 = b_1 - b_2 - b_3 + b_4$ ».

(4). Par définition de F, on a :

$$\begin{aligned} (b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in F) \quad & \Leftrightarrow \quad \left(\exists\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_5) \in \mathbb{R}^4,\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 v_5 = b\right) \\ & \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} \text{Le système de représentation matricielle} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 7 & b_2 \\ 1 & 3 & 4 & 13 & 8 & b_3 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 14 & b_4 \end{array}\right) \text{est compatible} \end{array}\right) \\ & \Leftrightarrow \quad (b_1 - b_2 - b_3 + b_4 = 0) \end{aligned}$$

Ainsi, $F = \{(x, y, z, t)\,,\ x - y - z + t = 0\}$.

(5). En reprenant la question précédente :

$$\begin{aligned} (b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in F) \quad & \Leftrightarrow \quad \left(\exists\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_5) \in \mathbb{R}^4,\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 v_5 = b\right) \\ & \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} \text{Le système de représentation matricielle} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 7 & b_2 \\ 1 & 3 & 4 & 13 & 8 & b_3 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 14 & b_4 \end{array}\right) \text{est compatible} \end{array}\right) \\ & \Leftrightarrow \quad (b_1 - b_2 - b_3 + b_4 = 0) \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ b_1 - b_2 - b_3 + b_4 = 0 \right. \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ b_1 = b_2 + b_3 - b_4 \right. \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b_1 = b_2 + b_3 - b_4 \\ b_2 = b_2 \\ b_3 = b_3 \\ b_4 = b_4 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b_1 = b_2 + b_3 - b_4 \\ b_2 = b_2 + 0b_3 + 0b_4 \\ b_3 = 0b_2 + b_3 + 0b_4 \\ b_4 = 0b_2 + 0b_3 + b_4 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad ((b_1, b_2, b_3, b_4) = b_2\,(1, 1, 0, 0) + b_3\,(1, 0, 1, 0) + b_4\,(-1, 0, 0, 1)) \\ & \Leftrightarrow \quad (b \in \operatorname{Vect}\,((1, 1, 0, 0)\,, (1, 0, 1, 0)\,, (-1, 0, 0, 1))) \end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Vect}\,((1, 1, 0, 0)\,, (1, 0, 1, 0)\,, (-1, 0, 0, 1)) = F$ où l'on note par la suite $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1, 0)$ et $u_3 = (-1, 0, 1, 0)$.

(6). $\mathcal{G}$ étant une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^4$, par théorème $\mathcal{G}$ est libre si, et seulement si, sa matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 3.

Un échelonnement en lignes de cette dernière donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par suite, cette matrice est de rang 3, et donc la famille $\mathcal{G}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$.