Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 0596

À l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{y}{\sqrt{y-1}}\,\mathrm{d}y$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 0596

En posant :

$$\begin{array}{ccc} u(y) = y & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(y) = 1 \\ v(y) = 2\sqrt{1-y} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y}} \end{array}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2;3]$, on obtient par intégration par parties que :

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 \frac{y}{\sqrt{y-1}}\,\mathrm{d}y \\ &= \left[2y\sqrt{y-1}\right]_2^3 - \int_2^3 2\sqrt{y-1}\,\mathrm{d}y \\ &= \left[2y\sqrt{y-1}\right]_2^3 - 2\int_2^3 \sqrt{y-1}\,\mathrm{d}y \\ &= \left[2y\sqrt{y-1}\right]_2^3 - 2\left[\frac{2}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3 \\ &= \left[2y\sqrt{y-1}\right]_2^3 - \frac{4}{3}\left[(y-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3 \\ &= 6\sqrt{2} - 4\sqrt{1} - \frac{4}{3}2^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}1^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{10\sqrt{2}}{3} - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

EX. 2 | Réf. 0597

À l'aide du changement de variables $u = \mathrm{e}^{\,t}$, calculer la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^{\,2}} \frac{\ln(u)}{u + u\left(\ln(u)\right)^2}\,\mathrm{d}u$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 0597

Le changement de variable $u = \mathrm{e}^{\,t}$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ permet d'écrire les relations $\left\{\begin{array}{ccc} u = 1 & \Longleftrightarrow & t = 0 \\ u = \mathrm{e}^{\,2} & \Longleftrightarrow & t = 2 \\ u = \mathrm{e}^{\,t} & \Longleftrightarrow & t = \ln(u) \\ \mathrm{d}u = \mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{d}t & \leftrightsquigarrow & \mathrm{d}t = \dfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u \end{array}\right.$

Par suite, d'après la formule de changement de variables pour les intégrales il vient :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{e^2} \frac{\ln(u)}{u + u\,(\ln(u))^2}\,du \\ &= \int_0^2 \frac{t}{e^t\,(1+t^2)} \times e^t\,dt \\ &= \int_0^2 \frac{t}{1+t^2}\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\ln(5) - \frac{1}{2}\ln(1) \\ &= \frac{1}{2}\ln(5) \end{aligned}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 0910

On considère la fonction f définie par : $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}} \end{array}\right.$.

1. Dresser le tableau de variations complet pour f en précisant notamment les limites aux bornes de son ensemble de définition.
2. **a.** Démontrer que : $\forall t \in [0;+\infty[\,,\ 2e^t - t - t^2 > 0$ et $1 + t \geq \sqrt{1+t^2}$.

   b. En déduire que : $\forall t \in [0;+\infty[\,,\ f(t) > t$.
3. On considère l'application G donnée par : $G : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt \end{array}\right.$.

   a. Montrer que G est une fonction impaire.

   b. À l'aide d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ dont on justifiera l'existence, montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et expliciter alors $G'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   c. Quelle est la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

   d. Dresser le tableau de variations complet pour G sur $\mathbb{R}$ en précisant notamment les limites aux bornes de son ensemble de définition.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 0910

1. **Variations de f :** La fonction $t \longmapsto 1+t^2$ étant continue, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, par composition, la fonction $t \longmapsto \sqrt{1+t^2}$ est de continue, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction $t \longmapsto 2e^t$ étant continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, puisque la fonction $t \longmapsto \sqrt{1+t^2}$ est de continue, dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, par quotient f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Il vient alors que : $$\forall t \in \mathbb{R},\quad f'(t) = \frac{2\mathrm{e}^{\,t} \times \sqrt{1+t^2} - 2\mathrm{e}^{\,t} \times \dfrac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^2} = \frac{2\mathrm{e}^{\,t}\left(\sqrt{1+t^2} - \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)}{1+t^2} = \frac{2\mathrm{e}^{\,t} \times \dfrac{1+t^2-t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{2\mathrm{e}^{\,t}\left(1-t+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)\sqrt{1+t^2}} = \frac{\overbrace{2\mathrm{e}^{\,t}}^{>0}\left(1-t+t^2\right)}{\underbrace{\left(1+t^2\right)\sqrt{1+t^2}}_{>0}}$$

Il est immédiat que $f'(t)$ est du signe de $1-t+t^2$ qui est un polynôme de degré 2 de discriminant strictement négatif, donc de signe constant, ici strictement positif.

Limite de f en $+\infty$: On a que : $$\forall t > 0,\ f(t) = \frac{2\mathrm{e}^{\,t}}{\sqrt{t^2\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)}} = \frac{2\mathrm{e}^{\,t}}{\sqrt{t^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}} = \frac{2\mathrm{e}^{\,t}}{|t|\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}} = \frac{2\mathrm{e}^{\,t}}{t\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}}$$

Comme $1+\dfrac{1}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et par croissances comparées que $\dfrac{\mathrm{e}^{\,t}}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il vient que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Limite de f en $-\infty$: On a directement que $\sqrt{1+t^2} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $2\mathrm{e}^{\,t} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui donne par quotient que $f(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit alors le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

t	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(t)$	$+$
Variations de f	$0 \nearrow +\infty$

2. a. **Inégalité $2\mathrm{e}^{\,t} - t - t^2 > 0$:** la fonction $h : t \longmapsto 2\mathrm{e}^{\,t} - t - t^2$ est clairement continue et dérivable sur $[0;+\infty[$ avec : $\forall t \in [0;+\infty[\,,\ h'(t) = 2\mathrm{e}^{\,t} - 1 - 2t$

Il est immédiat par croissances comparées que $h'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

De même , il vient que : $\forall t \in [0;+\infty[\,,\ h''(t) = 2\underbrace{\left(\mathrm{e}^{\,t}-1\right)}_{\geq 0 \text{ sur } [0;+\infty[}$.

On en déduit donc les variations et le signe de h' sur $[0;+\infty[$:

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $h''(t)$	$+$
Variations de h'	$1 \nearrow +\infty$
Signe de $h'(t)$	$+$

ce qui permet d'établir les variations et le signe de la fonction h sur $[0;+\infty[$:

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $h'(t)$	$+$
Variations de h	$2 \nearrow +\infty$
Signe de $h(t)$	$+$

puisque directement par croissances comparées $h(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ en factorisant par $\mathrm{e}^{\,t}$ dans l'expression $h(t)$.

Cette étude assure l'inégalité souhaitée.

Inégalité $1+t \geq \sqrt{1+t^2}$: il est clair que :

$$\forall t \in [0;+\infty[\,,\quad \begin{aligned} 1+t-\sqrt{1+t^2} &= \frac{\left(1+t-\sqrt{1+t^2}\right)\left(1+t+\sqrt{1+t^2}\right)}{1+t+\sqrt{1+t^2}} \\ &= \frac{(1+t)^2-\left(1+t^2\right)}{1+t+\sqrt{1+t^2}} \\ &= \frac{1+2t+t^2-1-t^2}{1+t+\sqrt{1+t^2}} \\ &= \frac{2t}{1+t+\sqrt{1+t^2}} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

ce qui assure l'inégalité souhaitée.

b. On a tout d'abord que : $\quad \forall t \in [0;+\infty[\,,\ f(t)-t = \dfrac{2\mathrm{e}^{\,t}-t\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}}$.

Comme : $\quad \forall t \in [0;+\infty[\,, 1+t \geq \sqrt{1+t^2}$

il vient que : $\quad \forall t \in [0;+\infty[\,,\ -t(1+t) \leq -t\sqrt{1+t^2}$

et par suite que : $\quad \forall t \in [0;+\infty[\,,\ \begin{aligned} f(t)-t &\geq \frac{2\mathrm{e}^{\,t}-t(1+t)}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \frac{\overbrace{2\mathrm{e}^{\,t}-t-t^2}^{>0}}{\underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{>0}} \\ &> 0 \end{aligned}$

ce qui donne l'inégalité demandée.

3. a. Le domaine de définition de G est clairement symétrique par rapport à 0, et il vient que :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\, G(-x) &= \int_{-(-x)}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{x}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -G(x)\end{aligned}$$

et donc G est bien une fonction impaire.

b. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, par théoème, elle admet une primitive F sur $\mathbb{R}$, cette dernière étant donc continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R},\, F'(x) = f(x)$.

Il vient alors que : $\forall x \in \mathbb{R},\, G(x) = F(x) - F(-x)$.

La fonction $x \longmapsto -x$ étant continue, dérivable et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par composition la fonction $x \longmapsto F(-x)$ est continue, dérivable et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et par somme, il vient que G est continue, dérivable et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, un calcul direct donne que : $\forall x \in \mathbb{R},\, G'(x) = f(x) - (-1) \times f(-x)$ c'est à dire $G'(x) = f(x) + f(-x)$.

c. Soit $x > 0$. D'après la relation de Chasles, on a que :

$$G(x) = \int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Sur l'intervalle $[-x; 0]$ où l'on a bien $-x \leq 0$, la fonction f est positive, donc par croissance de l'intégrale, on a que : $0 \leq \displaystyle\int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui assure que :

$$G(x) \geq \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Les fonctions $t \longmapsto f(t)$ et $t \longmapsto t$ étant continues sur $[0; x]$ et telles que $f(t) > t$ sur ce même intervalle, par croissance de l'intégrale, il vient que :

$$\int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_{0}^{x} t\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne que : $\displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Finalement on en dédit que $G(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

d. Un calcul direct donne que : $\forall x \in \mathbb{R},\, G'(x) = 2 \times \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1 + x^2}}$

et il est clair que $G'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On en déduit donc les variations de G sur $\mathbb{R}$ en utilisant notamment le caractère impair de G :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $G'(x)$	$+$
Variations de G	$-\infty \nearrow +\infty$