## Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

## Un peu de technique

### EX. 1 | Réf. 0595

On considère l'application $u$ donnée par :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-x+y, x-y, -x+z, -y+z) \end{array} \right.$$

1. Montrer que $u$ est linéaire.
2. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la matrice de $u$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
3. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, u(e_1), u(e_3))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
4. Déterminer la matrice de $u$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$.

## Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

### EX. 2 | Réf. 0173

On se place dans $\mathbb{R}^n$ et on considère un endomorphisme $p$ de $\mathbb{R}^n$ différent de l'application identité de $\mathbb{R}^n$ et tel que $p \circ p = p$, c'est à dire tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ p(p(x)) = p(x)$.
On définit alors une application $s$ par : $s = \mathrm{Id} - 2p$ où $\mathrm{Id}$ désigne l'application identité de $\mathbb{R}^n$.

1. Démontrer que $p$ n'est pas bijectif.
2. Démontrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a : $(y \in \mathrm{Im}(p)) \quad \Leftrightarrow \quad (p(y) = y)$.
3. Démontrer que $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$.
4. Établir : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists! (y,z) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p),\ x = y + z$
5. Justifier que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont des espaces de dimension finie.
6. Notons $r = \mathrm{rg}(p)$ et $k = \dim(\mathrm{Ker}(p))$. On désigne alors par $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathcal{B}_2 = (f_1, \ldots, f_k)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$.
   - **a.** Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_k)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
   - **b.** En déduire une relation entre $n$, $r$ et $k$.
   - **c.** Déterminer la matrice de $p$ dans la base $\mathcal{B}$ et en déduire celle de $s$ dans la base $\mathcal{B}$.
7. Déterminer $s \circ s$, puis en déduire que $s$ est un isomorphisme et expliciter $s^{-1}$.
8. Préciser alors $\mathrm{rg}(s)$, $\mathrm{Ker}(s)$ et $\mathrm{Im}(s)$.
9. Montrer que : $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(p)$.