Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1| Réf. 0595

On considère l'application u donnée par :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-x+y, x-y, -x+z, -y+z) \end{array} \right.$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
3. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, u(e_1), u(e_3))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
4. Déterminer la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$.

EX. 1| Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0595

1. On s'intéressera à l'image d'une combinaison linéaire pour assurer le caractère linéaire.
2. Il s'agit d'exprimer les images des vecteurs de la famille $\mathcal{B}_1$ et de les exprimer en fonction de vecteurs de la famille $\mathcal{B}_2$.
3. On pourra s'intéresser à son seul caractère libre en le justifiant.
4. Il s'agit d'exprimer les images des vecteurs de la famille $\mathcal{B}_1$ et de les exprimer en fonction de vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2| Réf. 0173

On se place dans $\mathbb{R}^n$ et on considère un endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ différent de l'application identité de $\mathbb{R}^n$ et tel que $p \circ p = p$, c'est à dire tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ p(p(x)) = p(x)$.
On définit alors une application s par : $s = \mathrm{Id} - 2p$ où Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^n$.

1. Démontrer que p n'est pas bijectif.
2. Démontrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a : $(y \in \mathrm{Im}\,(p)) \quad \Leftrightarrow \quad (p(y) = y)$.
3. Démontrer que $\mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Ker}\,(p) = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$.
4. Établir : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists!\,(y,z) \in \mathrm{Im}\,(p) \times \mathrm{Ker}\,(p),\ x = y + z$
5. Justifier que $\mathrm{Im}\,(p)$ et $\mathrm{Ker}\,(p)$ sont des espaces de dimension finie.
6. Notons $r = \mathrm{rg}\,(p)$ et $k = \dim(\mathrm{Ker}\,(p))$. On désigne alors par $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}\,(p)$ et $\mathcal{B}_2 = (f_1, \ldots, f_k)$ une base de $\mathrm{Ker}\,(p)$.
   - **a.** Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_k)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
   - **b.** En déduire une relation entre n, r et k.
   - **c.** Déterminer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ et en déduire celle de s dans la base $\mathcal{B}$.
7. Déterminer $s \circ s$, puis en déduire que s est un isomorphisme et expliciter s^{-1}.
8. Préciser alors $\mathrm{rg}\,(s)$, $\mathrm{Ker}\,(s)$ et $\mathrm{Im}\,(s)$.
9. Montrer que : $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\,(p)$ et $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\,(p)$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0173

1. On procèdera à un raisonnement par l'absurde pour montrer que dans ce cas là $p = \mathrm{Id}$.
2. On procèdera à un raisonnement par double implication en revenant à la définition des objets.
3. On procèdera par double inclusion en traduisant notamment le fait que l'appartenance simultanée à $\mathrm{Im}\,(p)$ et $\mathrm{Ker}\,(p)$ ne peut être satisfaite que par le vecteur nul.
4. Le point d'exclamation signifie que l'on parle de l'existence unique d'une telle décomposition, le tout étant de fabriquer y et z, en remarquant par exemple que $x = p(x) + x - p(x)$, et en s'assurant que cette décomposition convient et surtout est unique.
5. Ce sont deux sous-espaces de $\mathbb{R}^{\ltimes}$.
6. **a.** On montrera qu'il s'agit d'une famillle libre, en utilisant notamment la linéarité de p et le caractère base des deux familles qui interviennent.

   b. C'est le théorème du rang.

   c. On exploite les caractéristiques des éléments de $\mathcal{B}$ pour construire la matrice demandée.
7. On évalue $s(s(x))$.
8. On pensera caractérisation des automorphismes.
9. Il s'agira de manipuler les différentes définition de ces ensembles.