Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 0595

On considère l'application u donnée par :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-x+y, x-y, -x+z, -y+z) \end{array} \right.$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
3. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, u(e_1), u(e_3))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
4. Déterminer la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0595

1. On s'intéressera à l'image d'une combinaison linéaire pour assurer le caractère linéaire.
2. Il s'agit d'exprimer les images des vecteurs de la famille $\mathcal{B}_1$ et de les exprimer en fonction de vecteurs de la famille $\mathcal{B}_2$.
3. On pourra s'intéresser à son seul caractère libre en le justifiant.
4. Il s'agit d'exprimer les images des vecteurs de la famille $\mathcal{B}_1$ et de les exprimer en fonction de vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 0595

1. Soient $\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ w_1 = (x_1, y_1, z_1) & \in & \mathbb{R}^3 \\ w_2 = (x_2, y_2, z_2) & \in & \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$ on pose $w_3 = \lambda w_1 + w_2$ avec $w_3 = (x_1, x_2, x_3)$.

   Montrons que $u(w_3) = \lambda u(w_1) + u(w_2)$.

   Par construction de w_3, on a que : $\left\{ \begin{array}{rcl} x_3 & = & \lambda x_1 + x_2 \\ y_3 & = & \lambda y_1 + y_2 \\ z_3 & = & \lambda z_1 + z_2 \end{array} \right.$

   et un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl} u(w_3) & = & (-x_3+y_3, x_3-y_3, -x_3+z_3, -y_3+z_3) \\ & = & (-(\lambda x_1+x_2)+\lambda y_1+y_2, \lambda x_1+x_2-(\lambda y_1+y_2), -\lambda x_1+x_2+\lambda z_1+z_2, -(\lambda y_1+y_2)+\lambda z_1+z_2) \\ & = & (-\lambda x_1-x_2+\lambda y_1+y_2, \lambda x_1+x_2-\lambda y_1-y_2, -\lambda x_1+x_2+\lambda z_1+z_2, -\lambda y_1-y_2+\lambda z_1+z_2) \\ & = & (-\lambda x_1+\lambda y_1-x_2+y_2, \lambda x_1-\lambda y_1+x_2-y_2, -\lambda x_1+\lambda z_1+x_2+z_2, -\lambda y_1+\lambda z_1-y_2+z_2) \\ & = & (-\lambda x_1+\lambda y_1, \lambda x_1-\lambda y_1, -\lambda x_1+\lambda z_1, -\lambda y_1+\lambda z_1) + \underbrace{(-x_2+y_2, x_2-y_2, x_2+z_2, -y_2+z_2)}_{=u(w_2)} \\ & = & \lambda \underbrace{(-x_1+y_1, x_1-y_1, -x_1+z_1, -y_1+z_1)}_{=u(w_1)} + u(w_2) \\ & = & \lambda u(w_1) + u(w_2) \end{array}$$

   ce qui assure donc le caractère linéaire de u.

2. Un calcul direct donne que : $\left\{ \begin{array}{rcl} u(e_1) & = & (-1,1,-1,0) \\ & = & -f_1+f_2-f_3 \\ u(e_2) & = & (1,-1,0,-1) \\ & = & f_1-f_2-f_4 \\ u(e_3) & = & (0,0,1,1) \\ & = & f_3+f_4 \end{array} \right.$

et par suite la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. La famille $\mathcal{F}$ étant une famille de 4 vecteurs d'un espace de dimension 4, par théorème, son éventuel caractère libre lui assurera d'être aussi une base de $\mathbb{R}^4$.
Étudions la liberté de la famille $\mathcal{F}$.
Supposons que l'on ait $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$(\star) : \ af_1 + bf_2 + cu(e_1) + du(e_2) = \overrightarrow{0}$$

Compte-tenu des coordonnées des vecteurs de cette famille, $(\star)$ devient :

$$(a - c + d, b + c - d, -c, -d) = (0, 0, 0, 0)$$

et par identification des coefficients, il vient que (a, b, c, d) est solution du système :

$$\begin{cases} a \quad - c + d = 0 \\ \quad b + c - d = 0 \\ \quad\quad - c \quad = 0 \\ \quad\quad\quad - d = 0 \end{cases}$$

où il est immédiat que $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$ ce qui assure le caractère libre de la famille.

Par suite, $\mathcal{F}$ est une famille libre de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ avec $\dim\left(\mathbb{R}^4\right) = 4$, donc par théorème $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

4. Un calcul direct donne que : $\begin{cases} u(e_1) &= 0 \times f_1 + 0 \times f_2 + 1u(e_1) + 0 \times u(e_3) \\ u(e_2) &= (1, -1, 0, -1) \\ &= -u(e_1) - u(e_3) \\ f(u_3) &= 0 \times f_1 + 0 \times f_2 + 10fu, e_1 + 1 \times u(e_3) \end{cases}$

et par suite la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{F}$ est alors $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 0173

On se place dans $\mathbb{R}^n$ et on considère un endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ différent de l'application identité de $\mathbb{R}^n$ et tel que $p \circ p = p$, c'est à dire tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ p(p(x)) = p(x)$.
On définit alors une application s par : $s = \mathrm{Id} - 2p$ où Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^n$.

1. Démontrer que p n'est pas bijectif.

2. Démontrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a : $(y \in \mathrm{Im}(p)) \quad \Leftrightarrow \quad (p(y) = y)$.

3. Démontrer que $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

4. Établir : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists!\,(y, z) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p),\ x = y + z$

5. Justifier que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont des espaces de dimension finie.

6. Notons $r = \mathrm{rg}(p)$ et $k = \dim(\mathrm{Ker}(p))$. On désigne alors par $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathcal{B}_2 = (f_1, \ldots, f_k)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$.

- **a.** Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_k)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
- **b.** En déduire une relation entre n, r et k.
- **c.** Déterminer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ et en déduire celle de s dans la base $\mathcal{B}$.

7. Déterminer $s \circ s$, puis en déduire que s est un isomorphisme et expliciter s^{-1}.
8. Préciser alors $\text{rg}\,(s)$, $\text{Ker}\,(s)$ et $\text{Im}\,(s)$.
9. Montrer que : $\text{Ker}\,(s - \text{Id}) = \text{Ker}\,(p)$ et $\text{Ker}\,(s + \text{Id}) = \text{Im}\,(p)$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0173

1. On procèdera à un raisonnement par l'absurde pour montrer que dans ce cas là $p = \text{Id}$.
2. On procèdera à un raisonnement par double implication en revenant à la définition des objets.
3. On procèdera par double inclusion en traduisant notamment le fait que l'appartenance simultanée à $\text{Im}\,(p)$ et $\text{Ker}\,(p)$ ne peut être satisfaite que par le vecteur nul.
4. Le point d'exclamation signifie que l'on parle de l'existence unique d'une telle décomposition, le tout étant de fabriquer y et z, en remarquant par exemple que $x = p(x) + x - p(x)$, et en s'assurant que cette décomposition convient et surtout est unique.
5. Ce sont deux sous-espaces de $\mathbb{R}^{\ltimes}$.
6. **a.** On montrera qu'il s'agit d'une famillle libre, en utilisant notamment la linéarité de p et le caractère base des deux familles qui interviennent.

   b. C'est le théorème du rang.

   c. On exploite les caractéristiques des éléments de $\mathcal{B}$ pour construire la matrice demandée.
7. On évalue $s(s(x))$.
8. On pensera caractérisation des automorphismes.
9. Il s'agira de manipuler les différentes définition de ces ensembles.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 0173

1. Raisonnons par l'absurde en supposant que p est bijectif, c'est à dire que p^{-1} existe.
   Soit alors $x \in \mathbb{R}^n$. On sait que $p(p(x)) = p(x)$ donc en composant par p^{-1}, il vient que $p^{-1}(p(p(x)) = p^{-1}(x)$ c'est à dire que $p(x) = x$.
   Ainsi, il vient que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ p(x) = x$
   ce qui signifie que $p = \text{Id}$ et c'est contraire à l'hypothèse faite sur p.
2. **Supposons que** $y \in \text{Im}\,(p)$ **:** par définition, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = p(x)$.
   Donc $p(y) = p(p(x))$ et par la question précédente, $p(y) = p(x)$ ce qui assure que $y = p(y)$.

   Supposons que $y = (y_1, \ldots, y_n)$ **est tel que** $p(y) = y$ **:** on a donc que $p(p(y)) = p(y)$ et donc que $y = p(p(y))$ avec $p(p(y)) \in \text{Im}\,(f)$ et donc $y \in \text{Im}\,(p)$.
3. **Inclusion** $\left\{\overrightarrow{0}\right\} \subset \text{Im}\,(p) \cap \text{Ker}\,(p)$ **:** c'est immédiat puisque $\text{Ker}\,(p)$ et $\text{Im}\,(p)$ sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$, donc $\text{Ker}\,(p) \cap \text{Im}\,(p)$ en est un aussi et contient donc le vecteur nul.

   Inclusion $\text{Ker}\,(p) \cap \text{Im}\,(p) \subset \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ **:** soit $y \in \text{Ker}\,(p) \cap \text{Im}\,(p)$.

   Puisque $y \in \text{Im}\,(p)$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = p(x)$. De plus, $y \in \text{Ker}\,(p)$ donc $p(y) = \overrightarrow{0}$ et ainsi $p(p(x)) = \overrightarrow{0}$ et comme $p(p(x)) = p(x)$, il vient que $p(x) = \overrightarrow{0}$ et donc que $y = \overrightarrow{0}$ ce qui assure que $\text{Ker}\,(p) \cap \text{Im}\,(p) \subset \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
4. On commence par remarquer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x = \underbrace{p(x)}_{=y} + \underbrace{(x - p(x))}_{=z}$.

   Il est immédiat que $y \in \text{Im}\,(p)$, et un calcul direct par linéarité de p donne que :
   $$\begin{aligned} p(z) &= p\,(x - p(x)) \\ &= p(x) - p(p(x)) \\ &= p(x) - p(x) \\ &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$
   ce qui assure que $z \in \text{Ker}\,(f)$.
   D'où l'existence de la décomposition.
   Supposons que l'on ait deux décompositions sous la forme $x = y + z$ et $x = y' + z'$ avec $(y, z) \in \text{Im}\,(p) \times \text{Ker}\,(p)$ et $(y', z') \in \text{Im}\,(p) \times \text{Ker}\,(p)$.
   Il est donc immédiat que $y + z = y' + z'$. Par linéarité de p, il vient donc que $p(y) = p\,(y')$. Par ailleurs, comme $y = p(u)$ et $y' = p(u')$ par définition de y, il vient donc que $p(p(u)) = p(p(u'))$ ce qui assure que $p(u) = p(u')$ et donc que $y = y'$ et puis que $z = z'$, ce qui implique l'unicité de cette décomposition.

5. $\mathrm{Im}\,(p)$ et $\mathrm{Ker}\,(p)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension finie, donc par théorème, ils sont de dimension finie.

6. a. Supposons que l'on ait $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{R}^{r+k}$ tel que :

$$(\star): \quad \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r + \mu_1 f_1 + \ldots + \mu_k f_k = \overrightarrow{0}$$

Par linéarité de p, il vient que : $\lambda_1 p\,(e_1) + \ldots + \lambda_r p\,(e_r) + \underbrace{\mu_1 p\,(f_1) + \ldots + \mu_k f\,(f_k)}_{=\overrightarrow{0} \text{ car } (f_1, \ldots, f_k) \text{famille de } \mathrm{Ker}\,(p)} = \overrightarrow{0}$

D'où : $\lambda_1 p\,(e_1) + \ldots + \lambda_r p\,(e_r) = \overrightarrow{0}$

Comme $e_i \in \mathrm{Im}\,(p)$ par ce qui précède, on a que $p\,(e_i) = e_i$ et il vient que : $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r = \overrightarrow{0}$

Comme $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$, elle est en particulier libre, ce qui assure que $\begin{cases} \lambda_1 & = & 0 \\ & \vdots & \\ \lambda_r & = & 0 \end{cases}$

Il vient alors que : $\mu_1 f_1 + \ldots + \mu_k f_k = \overrightarrow{0}$

et par un argument similaire, on a que : $\begin{cases} g\mu_1 & = & 0 \\ & \vdots & \\ \mu_k & = & 0 \end{cases}$

La famille $\mathcal{B}$ est donc une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

Cette famille possède $k + r$ vecteurs, où d'après le théorème du rang on sait que $n = r + k$.

Finalement, $\mathcal{B}$ est donc une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec $\dim\,(\mathbb{R}^n) = n$, donc par théorème, c'est une base de $\mathbb{R}^n$..

b. Le théorème du rang donne directement que $n = k + r$.

c. Il est immédiat que la matrice de p dans cette base est : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & (0) & (0) \\ & \ddots & & \\ (0) & & 1 & \\ \hline & (0) & & (0) \end{array}\right)$

7. Par construction de s, on a :
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^n,\ s(s(x)) &= s(x) - 2p(s(x)) \\ &= x - 2p(x) - 2p(s(x)) \\ &= x - 2p(x) - 2p\,(x - 2p(x)) \\ &= x - 2p(x) - 2p(x) + 4p(p(x)) \\ &= x - 4p(x) + 4p(x) \\ &= x \end{aligned}$$

et finalement $s \circ s = \mathrm{Id}$. Par suite, s est bijectif, et son inverse est s, c'est à dire que $s^{-1} = s$. Par ailleurs, s étant un endomorphisme par combinaison linéaire d'endomorphismes, il vient que s est un automorphisme.

8. Le fait que s est bijectif, assure, par le théorème de caractérisation des automorphismes, que $\mathrm{rg}\,(s) = n$, $\mathrm{Ker}\,(s) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $\mathrm{Im}\,(s) = \mathbb{R}^n$.

9. Il est immédiat que :
$$\begin{aligned} (x \mathrm{Ker}\ (s - \mathrm{Id})) &\Leftrightarrow \left(x - 2p(x) - x = \overrightarrow{0}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(p(x) = \overrightarrow{0}\right) \\ &\Leftrightarrow (x \in \mathrm{Ker}\,(p)) \end{aligned}$$

et sur le même principe :
$$\begin{aligned} (y \in \mathrm{Im}\,(p)) &\Leftrightarrow (p(y) = y) \\ &\Leftrightarrow (2p(y) = 2y) \\ &\Leftrightarrow \left(y + y - 2p(y) = \overrightarrow{0}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(y + s(y) = \overrightarrow{0}\right) \\ &\Leftrightarrow (y \in \mathrm{Ker}\ (s + \mathrm{Id})) \end{aligned}$$