Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 4685

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est la famille $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$.

On considère la famille $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$ où $\begin{cases} P_0 = 1 + X + X^2 \\ P_1 = 1 - X + X^2 \\ P_2 = 2 - X + X^2 \end{cases}$.

1. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{C}$.
2. Qu'en déduire pour $\mathcal{C}$?

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4686

On considère l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \Phi(M) = AM - MA \end{array} \right.$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On rappelle que la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est la famille $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ où $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Construire la matrice A de Φ dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Sans autre caclul, en déduire deux vecteurs du noyau de Φ.
3. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ où $M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Déterminer la matrice de Φ dans la base $\mathcal{C}$.
5. Déduire de la question précédente une base de l'image et du noyau de Φ.