Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4087

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère la famille $\mathcal{B} = \big(X^3, X^2(X-2), X(X-2)^2, (X-2)^3\big)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer les coordonnées du polynôme $P = X^3 + 2X - 2$ dans la base $\mathcal{B}$.

EX. 2 | Réf. 4289

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels vérifiant : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$

Pour la suite de l'exercice, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Donner une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n$.
   En déduire l'expression de U_n en fonction de A et U_0.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$. Effectuer le produit matriciel $\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.
   Qu'en déduire pour P ?
3. Montrer que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on déterminera.
4. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.
5. Donner alors en fonction de n l'expression du terme général u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 1137

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $(\star) : f^2 = 2f + 3\mathrm{Id}_E$ où $f^2 = f \circ f$.

1. Démontrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}.
2. En remarquant que : $\forall x \in E,\ x = \dfrac{1}{4}(f(x) + x) + \dfrac{1}{4}(3x - f(x))$, montrer que $E = \mathrm{Ker}\ (f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\ (f + \mathrm{Id}_E)$.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 1667

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & \dots & \binom{n}{2} \\ \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ de :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array} \right.$$

2. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.
3. En déduire l'expression de A^{-1}.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 1211

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = \tilde{0}$.
On suppose par ailleurs qu'il existe n vecteurs $u_1, \dots, u_n$ de E tels que la famille $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ soit libre.

1. Démontrer que $\operatorname{rg} f \geq n$.
2. Prouver que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.
3. Établir que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.
4. Démontrer que les sous-espaces $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ sont supplémentaires dans E.

CC BY NC ND