Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question… **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 3745

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est une symétrie vectorielle et déterminer ses éléments caractéristiques.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 3748

Dans tout ce qui suit, E désigne un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $f^2 - 2f - 3\mathrm{Id}_E = \tilde{0}$ où l'on rappelle que $f^2 = f \circ f$, Id_E désigne l'application identité de E et $\tilde{0}$ l'endomorphisme nul de E.
On définit alors les deux éléments g et h de $\mathcal{L}(E)$ par : $g = f - 3\mathrm{Id}_E$ et $h = f + \mathrm{Id}_E$.

1. Soit $\overrightarrow{x} \in E$. Calculer $(g \circ h)\left(\overrightarrow{x}\right)$ et $(h \circ g)\left(\overrightarrow{x}\right)$.
Qu'en conclure pour les deux endomorphismes $g \circ h$ et $h \circ g$?

2. Soit $\overrightarrow{y} \in \mathrm{Im}(h)$. Montrer alors que $g\left(\overrightarrow{y}\right) = \overrightarrow{0}$.
Qu'en conclure pour $\mathrm{Im}(h)$ et $\mathrm{Ker}(g)$?
De même, que dire de $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(h)$?

3. On se propose dans cette question de montrer que $\mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Ker}(h) = E$.

a. Soit $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Ker}(h)$. Montrer que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

b. Soit $\overrightarrow{x} \in E$. Montrer que $\overrightarrow{x} = \frac{1}{4}h\left(\overrightarrow{x}\right) - \frac{1}{4}g\left(\overrightarrow{x}\right)$.

c. Déduire de ces deux questions $\mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Ker}(h) = E$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 3746

On rappelle que $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit alors $\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x 2tf(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right. \end{array} \right.$

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$? Justifier votre réponse.

2. Montrer que Ψ est une endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

3. Étudier l'injectivité et la surjectivité de Ψ. Conclure.

4. Déterminer pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ le sous-espace $\mathrm{Ker}\left(\Psi - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})}\right)$.

EX. 4 | Réf. 3747

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ab} \\ a & 1 & \frac{1}{b} \\ ab & b & 1 \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \times b \neq 0$.

Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

EX. 5 | Réf. 3749

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Calculer A^2 et A^3.

b. En déduire A^n pour tout entier n supérieur ou égal à 3.

2. Dans cette question $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice qui commute avec la matrice A, c'est à dire que vérifie la relation $AM = MA$.

On pose $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$

a. Montrer que les matrices qui commutent avec A sont de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ c'est à dire $M = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2$.

b. En déduire que l'on a $M^2 = a^2\mathrm{I}_3 + 2abA + \left(b^2 + 2ac\right)A^2$.

Écrire explicitement la matrice M^2 en fonction de a, b et c.

3. On se propose de montrer qu'il n'existe aucune matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = A$.

a. Montrer que si une telle matrice N existait, alors elle vérifierait $AN = NA$.

b. En déduire qu'il n'existe pas de matrice N telle que $N^2 = A$.

4. L'objectif de cette question est de trouver les matrices $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $PA = P - A$.

a. Justifier que la matrice $\mathrm{I}_3 - A$ est inversible.

b. Développer le produit $(\mathrm{I}_3 - A)\left(\mathrm{I}_3 + A + A^2\right)$ et en déduire l'inverse de la matrice $\mathrm{I}_3 - A$ en fonction de I_3, A et A^2.

c. Soit P une matrice vérifiant $PA = P - A$.

Montrer que : $P = A\left(\mathrm{I}_3 - A\right)^{-1}$ et en déduire l'expression de P en fonction de A et A^2.