Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [3170] | 1| Famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où l'on a :

$$u_1 = (1,3,2,1) \quad u_2 = (2,-1,-1,4) \quad u_3 = (2,-1,-1,4) \quad u_4 = (3,2,1,5)$$

Étudier le caractère libre et générateur de la famille $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice| [3222] | 2| Combinaison linéaire de vecteurs

Vérifier que la famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est liée, puis déterminer une relation de dépendance entre les vecteurs de cette famille :

$$u_1 = (1,-1,1,2)\,, u_2 = (-1,-2,1,1)\,, \quad u_3 = (-1,-8,5,7) \text{ et } u_4 = (1,5,-3,-4)$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [2076] | 3| Sommes téléscopiques

On se propose dans cet exercice de calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

(1). Vérifier par le calcul que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad 1 + \dfrac{2}{k(k+3)} = \dfrac{k^2+3k+2}{k(k+3)}$.

(2). Factoriser le polynôme $k^2 + 3k + 2$.

(3). Exprimer sous forme d'une somme $\ln\left(1 + \dfrac{2}{k(k+3)}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On pourra utiliser la factorisation du polynôme $k^2 + 3k + 2$.

(4). Calculer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right)$.

On pourra faire apparaître un téléscopage de termes.