Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 4685

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est la famille $\mathcal{B} = \big(1, X, X^2\big)$.

On considère la famille $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$ où $\begin{cases} P_0 = 1 + X + X^2 \\ P_1 = 1 - X + X^2 \\ P_2 = 2 - X + X^2 \end{cases}$.

1. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{C}$.
2. Qu'en déduire pour $\mathcal{C}$?

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4685

1. Par définition, le rang d'une famille de vecteurs est la dimension du sous-espace qu'elle engendre mais c'est aussi le rang de sa représentation matricielle dans une base donnée.
2. La famille $\mathcal{C}$ est alors une famille de rang 3 dans un espace de dimension 3, c'est donc une...

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4686

On considère l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \Phi(M) = AM - MA \end{array} \right.$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On rappelle que la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est la famille $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ où $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Construire la matrice A de Φ dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Sans autre caclul, en déduire deux vecteurs du noyau de Φ.
3. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ où $M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Déterminer la matrice de Φ dans la base $\mathcal{C}$.
5. Déduire de la question précédente une base de l'image et du noyau de Φ.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4686

1. Puisque $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace de dimension 4, la matrice A est un élément de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, que l'on construira en déterminant les images par Φ de E_{11}, E_{12}, E_{21} et E_{22}.
2. Le premier vecteur est évident...pour le deuxième, on observera attentivement les colonnes de A.
3. On pourra montrer que la famille $\mathcal{C}$ est une famille de rang 4 à l'aide de sa représentation matricielle dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui est lui même de dimension 4.
4. Il suffit de calculer les images par Φ de M_1, M_2, M_3 et M_4 et de les exprimer en fonction de ces quatres matrices.

5. Puisque $\mathcal{C}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on sait que $\mathrm{Im}\,(\Phi) = \mathrm{Vect}\,(\Phi\,(M_1)\,,\Phi\,(M_2)\,,\Phi\,(M_3)\,,\Phi\,(M_4))$ dont il suffira d'extraire une famille libre. On en déduira le rang de Φ, et par suite, son noyau qui se lit directement sur la matrice dans la base $\mathcal{C}$.