Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4087

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère la famille $\mathcal{B} = \big(X^3, X^2(X-2), X(X-2)^2, (X-2)^3\big)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer les coordonnées du polynôme $P = X^3 + 2X - 2$ dans la base $\mathcal{B}$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4087

1. Développer les polynômes constituant la famille $\mathcal{B}$ permettra d'écrire la matrice dans la base canonique de $\mathcal{R}_3[X]$ et de déterminer le rang de cette famille pour conclure.
2. Il s'agira simplement d'utiliser les formules de changement de base.

EX. 2 | Réf. 4289

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels vérifiant : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$

Pour la suite de l'exercice, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Donner une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n$.
   En déduire l'expression de U_n en fonction de A et U_0.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$. Effectuer le produit matriciel $\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.
   Qu'en déduire pour P ?
3. Montrer que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on déterminera.
4. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.
5. Donner alors en fonction de n l'expression du terme général u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4289

1. Il est facile de voir que la matrice A et déjà de cette forme : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$. Le reste doit nous faire penser à un processus type suite géométrique.
2. Puisque l'on obtient l'identité on en conclut que $P^{-1} = \ldots$.
3. Il suffit de réaliser le produit matriciel demandé.
4. On commencera par justifier que $A = PDP^{-1}$. On sait ensuite qu'il s'agit d'un raisonnement par récurrence...où l'on exploitera la relation $U_{n+1} = AU_n$ pour établir l'hérédité.
5. On connaît l'expression de A^n et il nous suffit de réaliser un seul calcul dans le produit matriciel A^nX_0 pour obtenir u_n.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 1137

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $(\star) : f^2 = 2f + 3\mathrm{Id}_E$ où $f^2 = f \circ f$.

1. Démontrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}.
2. En remarquant que : $\forall x \in E, x = \dfrac{1}{4}(f(x)+x) + \dfrac{1}{4}(3x - f(x))$, montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E)$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1137

1. Il suffit d'exploiter la relation $(\star)$ pour pouvoir écrire $f \circ g = \mathrm{Id}_E$ ce qui assurera le caractère bijectif de f et l'existence de f^{-1}.
2. On montrera dans un premier temps que $\dfrac{1}{4}(f(x)+x)$ appartient à l'un des deux noyaux définissant cette somme de sous-espace, et on fera de même avec $\dfrac{1}{4}(3x - f(x))$. Reste à montrer qu'elle est directe en étudiant l'intersection de ces deux sous-espaces.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 1667

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & \dots & \binom{n}{2} \\ & & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ de :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array} \right.$$

2. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.
3. En déduire l'expression de A^{-1}.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1667

1. On évaluera $f(X^n)$ à l'aide du binôme de Newton.
2. On pensera à construire f^{-1} directement en remarquant que $P(X+1)$ et $P(X-1)$ ne sont pas si différent que cela...
3. Il suffit sur le même principe qu'à la question 1 de déterminer la matrice de f^{-1} dans la base canonique.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 1211

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = \tilde{0}$.
On suppose par ailleurs qu'il existe n vecteurs $u_1, \dots, u_n$ de E tels que la famille $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ soit libre.

1. Démontrer que $\mathrm{rg}\, f \geq n$.

2. Prouver que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.
3. Établir que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.
4. Démontrer que les sous-espaces $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ sont supplémentaires dans E.

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1211

1. Il s'agit de faire le lien entre le rang d'une famille libre et la dimension de l'espace qu'elle engendre.
2. On reviendra à la définition d'une famille libre.
3. On remarquera que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ car $f^2 = \tilde{0}$, et on concluera par un argument de dimension.
4. Il suffit de s'assurer du caractère directe de la somme de ces deux sous-espaces, un argument de dimension permettra ensuite de conclure.