## Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

---

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

## Un peu de technique

### EX. 1 | Réf. 3745

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $f$ est une symétrie vectorielle et déterminer ses éléments caractéristiques.

### EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3745

- Une symétrie vectorielle $f$ est caractérisée par le fait que $f \circ f = \ldots$ ce qui matriciellement revient à vérifier que...
- On doit déterminer le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ par rapport à qui ont fait la symétrie et le sous-espace donnant la direction. Il faudra donc chercher les vecteurs invariants et ceux transformés en leur opposé pour identifier ces deux sous-espaces.

## Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

### EX. 2 | Réf. 3748

Dans tout ce qui suit, $E$ désigne un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\quad f^2 - 2f - 3\mathrm{Id}_E = \tilde{0}$ où l'on rappelle que $f^2 = f \circ f$, $\mathrm{Id}_E$ désigne l'application identité de $E$ et $\tilde{0}$ l'endomorphisme nul de $E$.
On définit alors les deux éléments $g$ et $h$ de $\mathcal{L}(E)$ par : $\quad g = f - 3\mathrm{Id}_E$ et $h = f + \mathrm{Id}_E$.

**1.** Soit $\overrightarrow{x} \in E$. Calculer $(g \circ h)\left(\overrightarrow{x}\right)$ et $(h \circ g)\left(\overrightarrow{x}\right)$.
Qu'en conclure pour les deux endomorphismes $g \circ h$ et $h \circ g$ ?

**2.** Soit $\overrightarrow{y} \in \mathrm{Im}(h)$. Montrer alors que $g\left(\overrightarrow{y}\right) = \overrightarrow{0}$.
Qu'en conclure pour $\mathrm{Im}(h)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ ?
De même, que dire de $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(h)$ ?

**3.** On se propose dans cette question de montrer que $\mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Ker}(h) = E$.

- **a.** Soit $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Ker}(h)$. Montrer que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
- **b.** Soit $\overrightarrow{x} \in E$. Montrer que $\overrightarrow{x} = \dfrac{1}{4}h\left(\overrightarrow{x}\right) - \dfrac{1}{4}g\left(\overrightarrow{x}\right)$.
- **c.** Déduire de ces deux questions $\mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Ker}(h) = E$.

### EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3748

**1.** Il suffit d'écrire les deux compositions d'applications linéaires et utiliser la relation vérifiée par $f$ pour conclure.

**2.** Dire que $\overrightarrow{y} \in \mathrm{Im}(h)$ signifie que $\overrightarrow{y} = h\left(\overrightarrow{x}\right)$ où $\overrightarrow{x} \in E$ et donc $g\left(\overrightarrow{y}\right) = \ldots$ à l'aide de la question précédente.

**3.**
- **a.** Traduire le fait que $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(g)$ et $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\, h$ pour obtenir une égalité qui permettra de conclure que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
- **b.** On vérifie la relation demandée en revenant à la définition de $g$ et $h$.
- **c.** Que doit-on avoir pour que deux sous-espaces sont supplémentaires ?

## Pour s'occuper les jours de pluies

## EX. 3 | Réf. 3746

On rappelle que $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit alors $\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x 2tf(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right. \end{array}\right.$

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ ? Justifier votre réponse.
2. Montrer que $\Psi$ est une endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.
3. Étudier l'injectivité et la surjectivité de $\Psi$. Conclure.
4. Déterminer pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ le sous-espace $\mathrm{Ker}\,\left(\Psi - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})}\right)$.

## EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3746

1. C'est certes un résultat du cours, mais pourquoi en fait ? Que pensez-vous de la famille de fonctions $(x \longmapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?
2. La linéarité de $\Psi$ est une conséquence de la linéarité de l'intégrale, mais c'est à écrire proprement.
3. On se rappelle que dans ce cas $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et par suite que $g'(x) = 2xf(x)$. Ainsi, pour le noyau on a que $g = \tilde{0}$ et par suite que...Pour la surjectivité, est-ce que l'existence d'un antécédent est compatible avec les caractères dérivable et continu qui interviennent dans les discussions ?
4. On est ici ramené à résoudre une équation différentielle.

## EX. 4 | Réf. 3747

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ab} \\ a & 1 & \frac{1}{b} \\ ab & b & 1 \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \times b \neq 0$.

Déterminer une base du noyau et de l'image de $f$.

## EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3747

- On utilise les techniques classiques d'échelonnement pour trouver une base du noyau et de l'image.
- On remarque que $a$ et $b$ sont non nuls et donc certaines opérations élémentaires seront licites, mais il faudra le préciser !

## EX. 5 | Réf. 3749

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Calculer $A^2$ et $A^3$.
   **b.** En déduire $A^n$ pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3.
2. Dans cette question $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice qui commute avec la matrice $A$, c'est à dire que vérifie la relation $AM = MA$.
   On pose $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$
   **a.** Montrer que les matrices qui commutent avec $A$ sont de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ c'est à dire $M = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2$.
   **b.** En déduire que l'on a $M^2 = a^2\mathrm{I}_3 + 2abA + \left(b^2 + 2ac\right)A^2$.
   Écrire explicitement la matrice $M^2$ en fonction de $a$, $b$ et $c$.
3. On se propose de montrer qu'il n'existe aucune matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = A$.

**a.** Montrer que si une telle matrice $N$ existait, alors elle vérifierait $AN = NA$.

**b.** En déduire qu'il n'existe pas de matrice $N$ telle que $N^2 = A$.

**4.** L'objectif de cette question est de trouver les matrices $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $PA = P - A$.

**a.** Justifier que la matrice $\mathrm{I}_3 - A$ est inversible.

**b.** Développer le produit $(\mathrm{I}_3 - A)\left(\mathrm{I}_3 + A + A^2\right)$ et en déduire l'inverse de la matrice $\mathrm{I}_3 - A$ en fonction de $\mathrm{I}_3$, $A$ et $A^2$.

**c.** Soit $P$ une matrice vérifiant $PA = P - A$.
Montrer que : $P = A\,(\mathrm{I}_3 - A)^{-1}$ et en déduire l'expression de $P$ en fonction de $A$ et $A^2$.

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | `Réf.3749`

**1.** **a.** RAS

**b.** RAS

**2.** **a.** On effectue les deux produits $AM$ et $MA$ et une identification des coefficients donnera sûrement les conditions sur les coefficients de $M$.

**b.** On calcule simplement $M^2$ à partir de la relation précédente.

**3.** **a.** Multiplier $N^2 = A$ par $N$ à droite par exemple et obtenir la relation demandée.

**b.** Un telle matrice $N$ commuterait avec $A$ et serait de la forme précédemment trouvée et $N^2$ ne pourrait pas être égal à $A$.

**4.** **a.** La forme de la matrice $\mathrm{I}_3 - A$ suffit pour répondre...

**b.** La réponse est dans la question...

**c.** On remplace $(\mathrm{I}_3 - A)^{-1}$ par son expression et on développe.