À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Travail facultatif

Un peu de technique

Exercice| [4635] | 1| Succession de tirages

On dispose d'une boîte qui contient deux jetons, un noir et un blanc.
On procède à une succession de n tirages dans cette boîte en le remettant entre chaque tirage après en avoir noté la couleur.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_n et D_n les événements suivants :

A_n **:** « on obtient des jetons des deux couleurs au cours des n tirages »

D_n **:** « on obtient au plus un jeton noir »

(1). Déterminer $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(D_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

(2). Dans le cas où $n = 2$, les deux événements A_n et D_n sont-ils indépendants ?

(3). Même question dans le cas où $n = 3$.

Pistes de réflexion

(1). On s'intéressera plutôt à $\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right)$, car l'événement $\overline{A_n}$ est bien plus simple à décrire. Pour D_n, on traduira sous forme d'une union disjointe la notion de « au plus un jeton noir ».

(2). On vérifiera si $\mathbb{P}(A_2 \cap D_2) = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(D_2)$.

(3). On vérifiera si $\mathbb{P}(A_3 \cap D_3) = \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}(D_3)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [1301] | 2| Étude d'une succession d'un nombre fini de lancers de dé

On lance n fois un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, non truqué.
Abusivement, on dit que « on obtient l'as » lorsque le résultat du lancer est la face numérotée « 1 ».
Si on sort au moins un as, on ne gagne rien, et si l'on n'a pas sorti d'as on gagne la somme des nombres obtenus.
On note X le gain obtenu à la fin du jeu.
Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire définie par $X_i = 0$ si l'un des lancers a amené un as et le numéro sorti au i^e lancer dans le cas contraire.

(1). Quel lien y a-t-il entre X et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$?

(2). Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X_i)$ de X_i puis l'espérance de X.

(3). Pour quelle(s) valeur(s) de n, l'espérance de X est-elle maximale ?

Pistes de réflexion

(1). Chaque variable aléatoire X_i apporte sa contribution au calcul du gain sur l'ensemble de la partie.

(2). On détermine dans un premier temps la loi de chaque variable aléatoire X_i pour ensuite en calculer l'espérance, et finalement conclure pour l'espérance de X à l'aide de la linéarité de l'espérance.

(3). Il s'agit ici d'étudier une fonction pour en déterminer le maximum sur un intervalle.