À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [3170] | 1| Famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où l'on a :

$$u_1 = (1, 3, 2, 1) \quad u_2 = (2, -1, -1, 4) \quad u_3 = (2, -1, -1, 4) \quad u_4 = (3, 2, 1, 5)$$

Étudier le caractère libre et générateur de la famille $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Pistes de réflexion

- On commencera par remarquer qu'il s'agit d'une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
- Comme elle possède 4 vecteurs, elle sera libre dès lors que le rang de la matrice de cette famille de vecteurs est égal à 4.
- Comme c'est une famille de $\mathbb{R}^4$, elle sera génératrice dès lors que le rang de la matrice de cette famille de vecteurs est égal à 4.
- On écrira donc la matrice de cette famille de vecteurs, pour laquelle on cherchera le rang par échelonnement.

Exercice| [3222] | 2| Combinaison linéaire de vecteurs

Vérifier que la famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est liée, puis déterminer une relation de dépendance entre les vecteurs de cette famille :

$$u_1 = (1, -1, 1, 2), u_2 = (-1, -2, 1, 1), \quad u_3 = (-1, -8, 5, 7) \text{ et } u_4 = (1, 5, -3, -4)$$

Pistes de réflexion

- On commencera par remarquer qu'il s'agit d'une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
- Comme elle possède 4 vecteurs, elle sera libre dès lors que le rang de la matrice de cette famille de vecteurs est égal à 4.
- On écrira donc la matrice de cette famille de vecteurs, pour laquelle on cherchera le rang par échelonnement.
- Pour la relation de dépendance, on en reviendra à la résolution d'un système linéaire dont on a déjà tous les éléments pour donner la solution, système obtenu à partir d'une combinaison linéaire de ces vecteurs.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [2076] | 3| Sommes téléscopiques

On se propose dans cet exercice de calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

(1). Vérifier par le calcul que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad 1 + \dfrac{2}{k(k+3)} = \dfrac{k^2 + 3k + 2}{k(k+3)}$.

(2). Factoriser le polynôme $k^2 + 3k + 2$.

(3). Exprimer sous forme d'une somme $\ln\left(1+\dfrac{2}{k(k+3)}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On pourra utiliser la factorisation du polynôme k^2+3k+2.

(4). Calculer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right)$.

On pourra faire apparaître un téléscopage de termes.

Pistes de réflexion

(1). On réduit au même dénominateur.

(2). C'est un polynôme de degré 2 en $k \in \mathbb{N}\ldots$

(3). Utiliser les propriétés opératoires du logarithme en utilisant les deux premières questions.

(4). Il y a une somme téléscopique à faire apparaître PROPREMENT et des changements d'indices éventuelllement.