Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2360

Résoudre à l'aide de la méthode dite de « combinaison », le système $\mathcal{S}$: $\begin{cases} 7x - 3y = 23 \\ 3x + 7y = 13 \end{cases}$.

On veillera à écrire toutes les étapes de la résolution, ainsi que les opérations élémentaires effectuées pour cette dernière.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2360

On résout le système par combinaison :

$$\mathcal{S} \underset{L_2 \leftarrow 7L_2 - 3L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 7x - 3y = 23 \\ 58y = 22 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow 58L_1 + 3L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 406x = 1400 \\ 58y = 22 \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{406}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{58}L_2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = \dfrac{100}{29} \\ y = \dfrac{11}{29} \end{cases}$$

Ainsi, le système $\mathcal{S}$ admet le couple $\boxed{\left(\dfrac{100}{29}, \dfrac{11}{29}\right)}$ comme unique solution.

EX. 2 | Réf. 2441

La fonction $f : x \longmapsto \left(1 + \sqrt{1 + x^2}\right)^3 + \left(1 - \sqrt{1 + x^2}\right)^3$ est-elle une fonction polynôme de degré 2 ? Si oui, justifier.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2441

Les développements de $\left(1 + \sqrt{1 + x^2}\right)^3$ et $\left(1 - \sqrt{1 + x^2}\right)^3$ donnent :

$$\begin{aligned} \left(1 + \sqrt{1 + x^2}\right)^3 &= 1 + 3\sqrt{1 + x^2} + 3\left(1 + x^2\right)^2 + \left(1 + x^2\right)\sqrt{1 + x^2} \\ &= 4 + 4\sqrt{1 + x^2} + 3x^2 + x^2\sqrt{1 + x^2} \\ \left(1 - \sqrt{1 + x^2}\right)^3 &= 1 - 3\sqrt{1 + x^2} + 3\left(1 + x^2\right)^2 - \left(1 + x^2\right)\sqrt{1 + x^2} \\ &= 4 - 4\sqrt{1 + x^2} + 3x^2 - x^2\sqrt{1 + x^2} \end{aligned}$$

et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = 8 + 6x^2$ qui est bien l'expression d'un polynôme de degré 2.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2442

On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ dont on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ la base de vecteurs du plan associée. Les coordonnées des points et vecteurs sont données respectivement dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{B}$.
Dans tout cet exercice, m désigne un réel quelconque.
Soit $\mathcal{D}_m$ la droite passant par $A\,(-2, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_m} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle et déterminer son centre Ω et son rayon R.
2. Donner, en fonction de m, une équation cartésienne de $\mathcal{D}_m$ en fonction de m.
3. Exprimer, en fonction de m, la distance de Ω à $\mathcal{D}_m$.

4. Montrer que $\mathcal{D}_m$ est tangente à $\mathcal{C}$ si, et seulement si, $m \in \left\{\dfrac{3-\sqrt{10}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{10}}{2}\right\}$.

5. En déduire les équations cartésiennes des tangentes à $\mathcal{C}$ issues de A.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2442

1. En factorisant, obtient :

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-2\times 1\times x+y^2-2\times 2\times y=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-2\times 1+1^2-1^2+y^2-2\times 2\times y+2^2-2^2=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y-2)^2-4=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=5 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(1,2)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

2. En notant $M(x,y)$ un point quelconque du plan, on a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y \end{pmatrix}$ et par suite :

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{D}_m &\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_m}\right]=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ y & m \end{vmatrix}=0 \\ &\Leftrightarrow m(x+2)-y=0 \\ &\Leftrightarrow mx-y+2m=0 \end{aligned}$$

Par suite, une équation cartésienne de $\mathcal{D}_m$ est : $mx-y+2m=0$

3. D'après la formule du cours, la distance du point Ω à la droite $\mathcal{D}_m$ est donc :

$$\begin{aligned} d(\Omega,\mathcal{D}_m) &= \frac{|m\times 1-2+2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} \\ &= \frac{|3m-2|}{\sqrt{m^2+1}} \end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_m \text{ est tangente à } \mathcal{C} &\Leftrightarrow d(\Omega,\mathcal{D}_m)=\sqrt{5} \\ &\Leftrightarrow \frac{|3m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5} \\ &\underset{\substack{\text{Les deux membres de} \\ \text{l'égalité sont positifs}}}{\Leftrightarrow} \left(\frac{|3m-2|}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{(3m-2)^2}{m^2+1}=5 \\ &\underset{\forall m\in\mathbb{R},\ m^2+1\neq 0}{\Leftrightarrow} (3m-2)^2=5\left(m^2+1\right) \\ &\Leftrightarrow 4m^2-12m-1=0 \end{aligned}$$

On reconnaît alors une équation de degré 2 d'inconnue m dont le discriminant vaut 160 et qui possède donc deux solutions réelles $m_1=\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}$ et $m_2=\dfrac{3-\sqrt{10}}{2}$.

Par conséquent, on en déduit que $\mathcal{D}_m$ est tangente à $\mathcal{C}$ si, et seulement si, $m \in \left\{\dfrac{3-\sqrt{10}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{10}}{2}\right\}$.

5. Les deux tangentes à $\mathcal{C}$ passant par A sont les deux droites $\mathcal{D}_m$ telles que $d(\Omega,\mathcal{D}_m)=\sqrt{5}$ et ont donc pour équation respectives $\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}x-y+3+\sqrt{10}=0$ et $\dfrac{3-\sqrt{10}}{2}x-y+3-\sqrt{10}=0$.