Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1973

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les deux droites d'équations cartésiennes respectives $-x+3y-5=0$ et $2x+11y-7=0$.

1. Le point $A_2\,(-13,3)$ appartient-il à $\mathcal{D}_2$?
2. Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de $\mathcal{D}_2$.
3. Écrire un système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}_2$.
4. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles sécantes ? Justifier votre réponse.
5. Résoudre le système d'équations $\mathcal{S}$: $\left\{\begin{array}{l} -x+3y-5=0 \\ 2x+11y-7=0 \end{array}\right.$. Que vient-on d'obtenir ?
6. Soit $\mathcal{D}_3$ la droite qui passe par $A_3\,(11,10)$ et perpendiculaire à $\mathcal{D}_2$.
   a. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{D}_3$.
   b. Calculer la distance du point A_3 à la droite $\mathcal{D}_2$.
   c. Déterminer la projection H_3 de A_3 sur la droite $\mathcal{D}_2$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 1973

1. Le point $A_2\,(-13,3)$ appartient à $\mathcal{D}_2$ puisque $2\times(-13)+11\times 3-7=-26+33-7=0$.
2. Les coefficients de l'équation de $\mathcal{D}_2$ permettent de dire que $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}_2$, et par suite que $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} -11 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$.
3. Un système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}_2$ s'en déduit : $\left\{\begin{array}{l} x=-13-11t \\ y=3+2t \end{array}\right., t\in\mathbb{R}$.
4. Le vecteur $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux respectivement à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
   Leur déterminant est non nul. En effet : $\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}=-1\times 11-2\times 3=-11-6=-17\neq 0$. Ainsi, ces deux vecteurs normaux à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas colinéaires, et par suite, les deux droites sont sécantes.
5. On résout le système $\mathcal{S}$ par combinaison. Les solutions obtenues seront les coordonnées du point d'intersection des deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

$$\left\{\begin{array}{l} -x+3y-5=0 \\ 2x+11y-7=0 \end{array}\right. \underset{L_1\leftarrow 2L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} -2x+6y-10=0 \\ 2x+11y-7=0 \end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow L_2+L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} -2x+6y-10=0 \\ 17y-17=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x+6y-10=0 \\ y=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x+6\times 1-10=0 \\ y=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x=4 \\ y=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2 \\ y=1 \end{array}\right.$$

6. a. Puisque $\mathcal{D}_3$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}_2$, tout vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$ est donc un vecteur normal de $\mathcal{D}_3$. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix} -11 \\ 2 \end{pmatrix}=\overrightarrow{u_2}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}_3$.
   Une équation cartésienne de $\mathcal{D}_3$ est donc de la forme $-11x+2y+c=0$, où c est un réel que l'on détermine à l'aide du point $A_3\,(11,10)$: $\quad -11\times 11+2\times 10+x=0 \quad\Leftrightarrow\quad c=101$.
   Par suite, $\mathcal{D}_3$: $\quad -11x+2y+101=0$.
   b. La distance du point A_3 à $\mathcal{D}_2$ est donnée par : $\dfrac{|2\times 11+11\times 10-7|}{\sqrt{2^2+11^2}}=\dfrac{|22+110-7|}{\sqrt{4+121}}=\dfrac{125}{\sqrt{125}}=\sqrt{125}$.
   c. Le point H_3 est le point de la droite $\mathcal{D}_2$ qui vérifie $\overrightarrow{u_2}\,.\,\overrightarrow{A_3H_2}=0$.

Le paramétrage de $\mathcal{D}_2$ donné plus haut permet d'écrire que $\overrightarrow{A_3H_2}\begin{pmatrix} -24-11t \\ -7+2t \end{pmatrix}$, et par suite :

$$\overrightarrow{u_2}\,.\,\overrightarrow{A_3H_2} = -11\times(-24-11t)+2\times(-7+2t) = 264+121t-14+4t = 250+125t$$

Or, on doit avoir $\overrightarrow{u_2}\,.\,\overrightarrow{A_3H_2} = 0$, soit ici $t=-2$.

Par suite, on en déduit à l'aide du paramétrage de $\mathcal{D}_2$ que : $\begin{cases} x_{H_2} = -13-11\times(-2) = 9 \\ y_{H_2} = 3+2\times(-2) = -1 \end{cases}$.

EX. 2 | Réf. 2282

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $A(3,0)$ et $B(0,4)$.

1. Déterminer le centre Ω et le rayon R de $\mathcal{C}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
3. Le point O appartient-il à $\mathcal{C}$? Justifier.
4. On désigne par $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point A.
   a. Donner un vecteur normal à $\mathcal{T}$.
   b. Déterminer ensuite une équation cartésienne de $\mathcal{T}$.
5. On admet que la tangente $\mathcal{T}'$ à $\mathcal{C}$ au point O a pour équation $-x-y=0$.
   Les droites $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont-elles perpendiculaires ?

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2282

1. Le cercle $\mathcal{C}$ étant de diamètre $[AB]$, son centre est le milieu Ω de $[AB]$ et son rayon $\dfrac{AB}{2}$. Or $\Omega\left(\dfrac{3+0}{2},\dfrac{0+4}{2}\right)$ c'est à dire $\Omega\left(\dfrac{3}{2},2\right)$.

   Par ailleurs, $AB = \sqrt{(3-0)^2+(0-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ et ainsi, le cercle $\mathcal{C}$ est de rayon $\dfrac{5}{2}$.
2. On en déduit directement que $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2 = \dfrac{25}{4}$ est une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
3. Les coordonnées du point O sont telles que $\left(0-\dfrac{3}{2}\right)^2+(0-2)^2 = \ldots = \dfrac{25}{4}$ et donc $O\in\mathcal{C}$.
4. a. Le point A étant clairement un point du cercle, un vecteur normal à $\mathcal{T}$ en A est $\overrightarrow{\Omega A}$, c'est à dire ici $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$.

   b. $\mathcal{T}$: $\begin{cases} \text{passe par } A(3,0) \\ \text{a pour vecteur normal } \overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix} \end{cases}$ donc un point $M(x,y)$ appartient à $\mathcal{T}$ si, et seulement si $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{\Omega A} = 0$. Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ -y \end{pmatrix}$ et par suite il vient $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{\Omega A} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix} = \dfrac{3}{2}(x-3)+y\times(-2) = \dfrac{3}{2}x-2y-\dfrac{9}{2}$. Finalement une équation cartésienne de $\mathcal{T}$ est donc $\dfrac{3}{2}x-2y-\dfrac{9}{2}=0$, ou encore $3x-4y-9=0$.
5. Un vecteur normal de $\mathcal{T}'$ est $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal de $\mathcal{T}$ étant $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$, les deux droites $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ seront perpendiculaires si, et seulement si $\overrightarrow{n'}\,.\,\overrightarrow{\Omega A} = 0$. Or $\overrightarrow{n'}\,.\,\overrightarrow{\Omega A} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix} = -1\times\dfrac{3}{2}+(-1)\times(-2) = \dfrac{1}{2} \neq 0$ et par conséquent les deux droites ne sont pas perpendiculaires.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 1934

$ABCD$ est un rectangle avec $AB = 3a$ et $BC = 2a$.
On note I le milieu de $[BC]$, et K le point tel que $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.
J est le projeté orthogonal du point K sur la droite (AI).

1. Calculer, en fonction de a, les produits scalaires $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{KA}$.
2. En utilisant des relations de Chasles, calculer $\overrightarrow{AK}\,.\,\overrightarrow{AI}$.
3. En exprimant d'une autre façon le produit scalaire $\overrightarrow{AK}\,.\,\overrightarrow{AI}$, en déduire la distance AJ en fonction de a.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 1934

On commence par illustrer cette situation par un schéma :

1. On remarque que le projeté orthogonal de I sur la droite (AB) support du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est B. Par suite $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AI} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 9a^2$.

   Sur le même principe, $\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{KA} = -\left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \left\|\overrightarrow{DA}\right\| = -4a^2$.

2. Puisque $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AK}\,.\,\overrightarrow{AI} &= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}\right).\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}\right) \\
&= \overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DK}\,.\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DK}\,.\,\overrightarrow{BI} \\
&= 0 + 2a \times a + \frac{1}{3} \times 3a \times 3a + 0 \\
&= 2a^2 + 3a^2 \\
&= 5a^2
\end{aligned}$$

3. Le projeté orthogonal de K sur la droite (AI) support du vecteur $\overrightarrow{AI}$ est le point J. Ainsi, on en déduit que $\overrightarrow{AK}\,.\,\overrightarrow{AI} = AI \times AJ$. Par conséquent $5a^2 = AI \times AJ$.

   Le théorème de Pythagore dans le rectangle ABI rectangle en B donnera que $AI = a\sqrt{10}$. Finalement, on en déduit que $5a^2 = a\sqrt{10} \times AJ$, et par suite que $AJ = \dfrac{5a}{\sqrt{10}}$ que l'on peut aussi écrire $AJ = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.