Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 4685

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est la famille $\mathcal{B} = \big(1, X, X^2\big)$.

On considère la famille $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$ où $\begin{cases} P_0 = 1 + X + X^2 \\ P_1 = 1 - X + X^2 \\ P_2 = 2 - X + X^2 \end{cases}$.

1. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{C}$.
2. Qu'en déduire pour $\mathcal{C}$?

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4685

1. On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$. Par théorème : $\mathrm{rg}\,(\mathcal{C}) = \mathrm{rg}\,(M)$.

   Par définition : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Un échelonnement en lignes de la matrice M donne :

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3 et ainsi $\mathcal{C}$ est une famille de rang 3.
2. La famille $\mathcal{C}$ étant une famille de 3 vecteurs de rang 3 dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension finie égale à 3, d'après le théorème de caractérisation des bases par le rang, elle est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4686

On considère l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \Phi(M) = AM - MA \end{array} \right.$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On rappelle que la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est la famille $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ où $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Construire la matrice A de Φ dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Sans autre caclul, en déduire deux vecteurs du noyau de Φ.
3. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ où $M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Déterminer la matrice de Φ dans la base $\mathcal{C}$.
5. Déduire de la question précédente une base de l'image et du noyau de Φ.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4686

1. Un calcul direct donne que :

$$\Phi(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Phi(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Phi(E_{21}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Phi(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour en déduire donc que : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. On a déjà que $\Phi(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $E_{12} \in \operatorname{Ker}(\Phi)$.

   Puisque $C_1 = -C_4$, on en déduit que : $\Phi(E_{11}) + \Phi(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Ce qui donne par linéarité de Φ, que $\Phi(E_{11} + E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui donne que $E_{11} + E_{22} \in \operatorname{Ker}(\Phi)$.

3. La famille $\mathcal{C}$ est une famille de 4 vecteurs de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui est un espace de dimension 4. Par théorème, elle sera une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement, son rang est égal à 4.
   Or le rang de la famille $\mathcal{C}$ est par théorème, le rang d'une de ses représentations matricielles dans une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   En notant $P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, on a : $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Un échelonnement en lignes de la matrice P donne :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\sim_L} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Ainsi, la matrice P est de rang 4, et d'après les éléments présentés plus haut, la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

4. En utilisant la linéarité de Φ :

   Puisque $M_1 = \frac{1}{2}E_{11} + \frac{1}{2}E_{22}$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \Phi(M_1) &= \frac{1}{2}\Phi(E_{11} + E_{22}) \\ &\underset{E_{11}+E_{22} \in \operatorname{Ker}(\Phi)}{=} \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   De même, puisque $M_2 = 2E_{12}$ et que $E_{12} \in \operatorname{Ker}(\Phi)$, on en déduit par linéarité de Φ que $\Phi(M_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   On a aussi $M_3 = -E_{11} + E_{22}$, donc par linéarité de Φ, on a :

$$\begin{aligned} \Phi(M_3) &= -\Phi(E_{11}) + \Phi(E_{22}) \\ &= -E_{12} - E_{12} \\ &= -2E_{12} \\ &= M_2 \end{aligned}$$

   De plus, $M_4 = E_{21}$, donc :

$$\begin{aligned} \Phi(M_4) &= \Phi(E_{21}) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= M_3 \end{aligned}$$

   On en déduit donc que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Par théorème, puisque $\mathcal{C}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on sait que $\operatorname{Im}(\Phi) = \operatorname{Vect}(\Phi(M_1), \Phi(M_2), \Phi(M_3), \Phi(M_4))$, c'est à dire $\operatorname{Im}(\Phi) = \operatorname{Vect}(\Phi(M_3), \Phi(M_4))$.
   Les vecteurs $\Phi(M_3)$ et $\Phi(M_4)$ étant clairement non nuls et non colinéaires, ils forment donc une famille libre de $\operatorname{Im}(\Phi)$. Ainsi, la famille $(\Phi(M_3), \Phi(M_4))$ est une famille libre et génératrice de $\operatorname{Im}(\Phi)$. Elle en forme donc une base, et on en déduit de plus que $\operatorname{rg}(\Phi) = 2$.

Par conséquent, d'après le théorème du rang il vient : $\underbrace{\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))}_{=4} = \dim(\mathrm{Ker}\ (\Phi)) + \underbrace{\mathrm{rg}\ (\Phi)}_{=2}$.

Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}\ (\Phi)) = 2$. Or puisque $\Phi(M_1) = (0)$ et $\Phi(M_2) = (0)$, on a par linéarité de Φ que $\mathrm{Vect}\ (M_1, M_2) \subset \mathrm{Ker}\ (\Phi)$.

Or M_1 et M_2 étant non nuls et non colinéaires, ils forment une famille libre. Ainsi, $\mathrm{Vect}\ (M_1, M_2)$ est un espace de dimension 2. Comme $\mathrm{Vect}\ (M_1, M_2)$ est alors un sous-espace de dimension 2 d'un espace de dimension 2, on en déduit que $\mathrm{Vect}\ (M_1, M_2) = \mathrm{Ker}\ (\Phi)$ et la famille (M_1, M_2) est une base de $\mathrm{Ker}\ (\Phi)$.