Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4087

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère la famille $\mathcal{B} = \big(X^3, X^2(X-2), X(X-2)^2, (X-2)^3\big)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer les coordonnées du polynôme $P = X^3 + 2X - 2$ dans la base $\mathcal{B}$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4087

1. On note pour la suite $\mathcal{B}_0 = \big(1, X, X^2, X^3\big)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
   Puisque $\mathcal{B} = \big(X^3, X^2(X-2), X(X-2)^2, (X-2)^3\big)$ en développant chaque polynôme, il vient que $\mathcal{B} = \big(X^3, -2X^2 + X^3, 4X - 4X^2 + X^3, -8 + 12X - 6X^2 + X^3\big)$.
   $\mathcal{B}$ est une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$ qui est un espace de dimension finie égale à 4. D'après le théorème de caractérisation des bases par le rang, la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ si, et seulement si, le rang de la famille $\mathcal{B}$ est égal à 4.
   Or le rang de la famille $\mathcal{B}$ est égal au rang de l'une de ses représentations matricielles dans une base quelconque de $\mathbb{R}_3[X]$, en particulier $\mathcal{B}_0$.
   Par définition de $\mathcal{B}$, on a : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Un échelonnement en colonne de cette dernière donne que :
   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_4 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}}{\sim_C} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   Cette dernière matrice étant triangulaire inférieure avec tous ses termes diagonaux non nuls, elle est donc de rang 4.
   Par suite la famille $\mathcal{B}$ est de rang 4, et ainsi, c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
   $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. D'après les formules de changements de bases pour les vecteurs, on a : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0}(P) = P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}} \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(P)$.
   Or on a : $P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0}(P) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Par suite, on en déduit que : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \left(P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}}\right)^{-1} \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0}(P)$
   Un échelonnement en ligne de la matrice augmentée $(P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}}|\mathrm{I}_4)$ donnera $\left(P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}}\right)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_4}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2} L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{4} L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{8} L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1 L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{4} L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2} L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3 \\ L_4 \leftarrow -\frac{1}{8} L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi : $\quad (P_{\mathcal{B}_0 \mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Il vient alors : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{4} \\ -\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$

On en déduit que les coordonnées de P dans $\mathcal{B}$ sont $\left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$, c'est à dire que $P = \dfrac{5}{4}X^3 - \dfrac{1}{4}X^2(X-2) - \dfrac{1}{4}X(X-2)^2 + \dfrac{1}{4}(X-2)^3$

EX. 2 | Réf. 4289

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels vérifiant : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$

Pour la suite de l'exercice, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Donner une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n$.
En déduire l'expression de U_n en fonction de A et U_0.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$. Effectuer le produit matriciel $\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.
Qu'en déduire pour P ?

3. Montrer que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on déterminera.

4. Montrer par récurrence que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

5. Donner alors en fonction de n l'expression du terme général u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4289

1. Puisque $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ il vient que $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix}$. Par suite en posant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$: il vient :

$$\begin{aligned} AU_n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ 6u_n - 11u_{n+1} + 6u_{n+2} \end{pmatrix} \\ &= U_{n+1} \end{aligned}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ est telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\, U_{n+1} = AU_n$.

On pourrait alors montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\, U_{n+1} = A^nU_0$.

2. Un calcul direct donne :
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2\mathrm{I}_3 \end{aligned}$$

On en déduit donc que la matrice P est inversible, et d'inverse $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \\ 1 & 27 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En notant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a bien $P^{-1}AP = D$ où $D \in \mathcal{D}_3(\mathbb{R})$.

4. Puisque $P^{-1}AP = D$, en multipliant à gauche par P, il vient $AP = PD$ puis en multiplicant par P^{-1} à droite, il vient $A = PDP^{-1}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathcal{P}(n)$: ´ $A^nPD^nP^{-1}$ ˇ

Montrons par récurrence sur l'entier n que la propositon $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Initisalition : au rang 0, par convention $A^0 = \mathrm{I}_3$. De même $D^0 = \mathrm{I}_3$ et ainsi :
$$\begin{aligned} PD^0P^{-1} &= P\mathrm{I}_3P^{-1} \\ &= PP^{-1} \\ &= \mathrm{I}_3 \\ &= A^0 \end{aligned}$$

et ainsi la propostion $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$ et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

Par définition, $A^{n+1} = A^n \times A$. Or par hypothèse de récurrence $A^n = PD^nP^{-1}$ et on sait que $A = PDP^{-1}$.

Par suite, il vient :
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} \\ &= PD^n\mathrm{I}_3DP{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\, A^n = PD^nP^{-1}$.

5. De ce qui précède, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = PD^nP^{-1}U_0$.

Cette relation s'écrit aussi : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Seul le coefficient de la première ligne du résultat terminal nous intéresse :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 1 & 3^n & 2^n \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}}\underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3^n & 2^n \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 + 3^n - 2^{n+1} \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2}\left(3 - 2^{n+1} + 3^n\right)$.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 1137

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $(\star) : f^2 = 2f + 3\mathrm{Id}_E$ où $f^2 = f \circ f$.

1. Démontrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}.

2. En remarquant que : $\forall x \in E, x = \frac{1}{4}(f(x) + x) + \frac{1}{4}(3x - f(x))$, montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E)$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 1137

1. La relation $(\star)$ peut s'écrire aussi : $f^2 - 2f = 3\mathrm{I}_E$ ou encore $f \circ (f - 2\mathrm{Id}_E) = 3\mathrm{Id}_E$. Par suite, on a $f \circ \left(\frac{1}{3}f - \frac{2}{3}\mathrm{I}_E\right) = \mathrm{I}_E$. On en déduit donc qu'il existe une application g telle que $f \circ g = \mathrm{I}_E$, et par suite que f est bijective.
f étant un endomorphisme bijectif, c'est un automorphisme, d'inverse $f^{-1} = \frac{1}{3}f - \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E$.

2. Soit $x \in E$. On écrit alors $x = \frac{1}{4}(f(x) + x) + \frac{1}{4}(3x - f(x))$.

On a alors : $$\begin{aligned}
(f - 3\mathrm{Id}_E)\frac{1}{4}(f(x) + x) &= \frac{1}{4}\left(f\left(f(x) + x\right) - 3\left(f(x) + x\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(f^2(x) + f(x) - 3f(x) - 3x\right) \\
&= \frac{1}{4}\underbrace{\left(f^2(x) - 2f(x) - 3x\right)}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

et ainsi, $\frac{1}{4}(f(x) + x) \in \mathrm{Ker}\,(f - 3\mathrm{Id}_E)$.

De même : $$\begin{aligned}(f+\mathrm{Id}_E)\frac{3}{4}(3x-f(x)) &= \frac{3}{4}\left(f(3x-f(x))+(3x-f(x))\right)\\ &= \frac{3}{4}\left(-f^2(x)+f(3x)+3x-f(x)\right)\\ &= \frac{3}{4}\left(-f^2(x)+3f(x)-f(x)+3x\right)\\ &= -\frac{3}{4}\underbrace{\left(f^2(x)-2f(x)-3x\right)}_{=0}\\ &= 0\end{aligned}$$

et ainsi $\frac{3}{4}(3x-f(x)) \in \mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}_E)$.

On en déduit que $E = \mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Ker}\,(f-3\mathrm{Id}_E)$.

Or la somme $\mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Ker}\,(f-3\mathrm{Id}_E)$ est directe si, et seulement si, $\mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Ker}\,(f-3\mathrm{Id}_E)=\{0\}$.

Inclusion $\{0\}\subset \mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Ker}\,(f-3\mathrm{Id}_E)$: puisque $\mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(f-3\mathrm{Id}_E)$ sont deux sous-espaces de E, leur intersection est un sous-espace de E, et contient donc le vecteur nul, et ainsi, on a bien $\{0\}\subset \mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Ker}\,(f-3\mathrm{Id}_E)$.

Inclusion $\mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Ker}\,(f-3\mathrm{Id}_E)\subset\{0\}$: soit alors $x\in \mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Ker}\,(f-3\mathrm{Id}_E)$.
On a donc $(f+\mathrm{Id}_E)(x)=0$ c'est à dire $f(x)+x=0$ ou encore $f(x)=-x$.
De même on a $(f-3\mathrm{Id}_E)(x)=0$, c'est à dire $f(x)-x=0$ ou encore $f(x)=3x$.
On en déduit donc que $-x=3x$ ce qui conduit à $x=0$ et à l'inclusion souhaitée.

On a $\mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Ker}\,(f-3\mathrm{Id}_E)=\{0\}$ et par suite la somme $\mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Ker}\,(f-3\mathrm{Id}_E)$ est directe, et par suite on a bien $E=\mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\mathrm{Ker}\,(f-3\mathrm{Id}_E)$

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 1667

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et A la matrice définie par :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n}{1}\\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & \dots & \binom{n}{2}\\ & & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{n}{n}\end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ de :

$$f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X]\\ P & \longmapsto & P(X+1)\end{array}\right.$$

2. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

3. En déduire l'expression de A^{-1}.

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 1667

1. Remarquons tout d'abord que f est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. D'après la formule du binôme de Newton, on peut écrire pour tout $k\in[\![0;n]\!]$:

$$f(X^k)=(X+1)^k=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}X^j$$

On constate donc rapidement que la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ n'est autre que la matrice A. En conclusion, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=A$.

2. Considérons l'endomorphisme $g:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X]\\ P & \longmapsto & P(X-1)\end{array}\right.$. On remarque alors que $f\circ g=g\circ f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$, ce qui permet de conclure que f est bijective et $f^{-1} = g$.

3. L'endomorphisme f est bijectif, donc la matrice A associée est inversible, et on peut écrire $A^{-1} = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$.

   Or pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, la formule du binôme de Newton permet d'écrire : $g(X^k) = (X-1)^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j (-1)^{k-j}$.

   On en déduit donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^n \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \dots & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & \dots & (-1)^{n-2}\binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 1211

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = \tilde{0}$.
On suppose par ailleurs qu'il existe n vecteurs $u_1, \dots, u_n$ de E tels que la famille $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ soit libre.

1. Démontrer que $\mathrm{rg}\, f \geq n$.
2. Prouver que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.
3. Établir que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$.
4. Démontrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_n)$ sont supplémentaires dans E.

EX. 5 | Éléments de correction | Réf. 1211

1. On a $\mathrm{Vect}\,(f(u_1), \dots, f(u_n)) \subset \mathrm{Im}\, f$, donc par passage aux dimensions, $\dim \mathrm{Vect}\,(f(u_1), \dots, f(u_n)) \leq \mathrm{rg}\, f$. Or par hypothèse, la famille $f(u_1), \dots, f(u_n)$ est libre donc la dimension de l'espace qu'elle engendre est égale à n et ainsi $\mathrm{rg}\, f \geq n$.
2. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels vérifiant $\alpha_1 u_1 + \dots \alpha_n u_n = 0$, en appliquant f à cette relation on a $\alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_n f(u_n) = 0$ avec $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ libre, donc $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, et la liberté de la famille.
3. On remarque que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$ car si $y \in \mathrm{Im}\, f$, on peut écrire $y = f(x)$ avec $x \in E$, puis on obtient $f(y) = f^2(y) = 0$ vu que $f^2 = 0$ et ainsi $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$. Par passage à la dimension, on en déduit que $\mathrm{rg}\, f \leq \dim \mathrm{Ker}\, f$ et en utilisant le théorème du rang, on en déduit que $\mathrm{rg}\, f \leq 2n - \mathrm{rg}\, f$, d'où $\mathrm{rg}\, f \leq n$ et d'après la première question $\mathrm{rg}\, f \geq n$. Par suite $\mathrm{rg}\, f = n$. On trouve donc que $\dim \mathrm{Ker}\, f = n$ et ainsi $\dim \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{rg}\, f$ qui donne $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$.
4. l'espace $\mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_n)$ est de dimension n car la famille $u_1, \dots, u_n$ est libre d'après la question 2. D'où $\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_n) = 2n = \dim E$. Par ailleurs, si u est un vecteur commun à $\mathrm{Ker}\, f$ et à $\mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_n)$, on peut écrire $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ et $f(u) = 0$ qui donne $\alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_n f(u_n) = 0$ et la liberté de la famille $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ donne $\alpha_i = 0$ et u est nul d'où le résultat.