Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 3745

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est une symétrie vectorielle et déterminer ses éléments caractéristiques.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 3745

Pour tout la suite, on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_3}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On sait que : $(f$ est une symétrie vectorielle$) \quad \Leftrightarrow \quad (f \circ f = \mathrm{Id}_E)$

$\Leftrightarrow \quad (A^2 = \mathrm{I}_3)$

Or un calcul rapide permet de voir que $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc f est bien une symétrie vectorielle.

On note alors : $F_1 = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3,\, f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{x}\right\}$ et $F_2 = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3,\, f\left(\overrightarrow{x}\right) = -\overrightarrow{x}\right\}$.

f est alors la symétrie vectorielle par rapport à F_1 de direction F_2.

Recherche d'une base de F_1 : de part la définition de F_1, il vient que : $\left(\overrightarrow{x} \in F_1\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)\right)$

La représentation matricielle de $f - \mathrm{Id}_E$ est : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f - \mathrm{Id}_E) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Or on a : $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1}}{\sim_C} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, $f - \mathrm{Id}_E$ est de rang 1 et $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ est de dimension 2.

En reprenant les opérations de cet échelonnement en colonne, on a $\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_1} \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\overrightarrow{e_3} - 2\overrightarrow{e_1} \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ sont deux vecteurs non nuls non colinéaires, donc libres, de $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ qui est de dimension 2, et ils en forment alors une base. Ainsi $F_1 = \mathrm{Vect}\,((-2, 1, 0), (-2, 0, 1))$.

Recherche d'une base de F_2 : de part la définition de F_2, il vient que : $\left(\overrightarrow{x} \in F_2\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E)\right)$

La représentation matricielle de $f - \mathrm{Id}_E$ est : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f - \mathrm{Id}_E) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Or on a : $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{\sim_C} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C3 + C_2}{\sim_C} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, $f + \mathrm{Id}_E$ est de rang 2 et $\mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E)$ est de dimension 1.

En reprenant les opérations de cet échelonnement en colonne, on a $-2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} \in \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E)$ qui est donc un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E)$, et par suite en forme une base. Ainsi $F_2 = \mathrm{Vect}\,((-2, 1, 1))$.

Finalement, f est la symétrie vectorielle par rapport au plan vectoriel $\mathrm{Vect}\,((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ de direction la droite vectorielle $\mathrm{Vect}\,((-2, 1, 1))$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 3748

Dans tout ce qui suit, E désigne un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $f^2 - 2f - 3\mathrm{Id}_E = \tilde{0}$ où l'on rappelle que $f^2 = f \circ f$, Id_E désigne l'application identité de E et $\tilde{0}$ l'endomorphisme nul de E.
On définit alors les deux éléments g et h de $\mathcal{L}(E)$ par : $g = f - 3\mathrm{Id}_E$ et $h = f + \mathrm{Id}_E$.

1. Soit $\overrightarrow{x} \in E$. Calculer $(g \circ h)\left(\overrightarrow{x}\right)$ et $(h \circ g)\left(\overrightarrow{x}\right)$.
Qu'en conclure pour les deux endomorphismes $g \circ h$ et $h \circ g$?

2. Soit $\overrightarrow{y} \in \mathrm{Im}(h)$. Montrer alors que $g\left(\overrightarrow{y}\right) = \overrightarrow{0}$.
Qu'en conclure pour $\mathrm{Im}(h)$ et $\mathrm{Ker}(g)$?
De même, que dire de $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(h)$?

3. On se propose dans cette question de montrer que $\mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Ker}(h) = E$.

a. Soit $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Ker}(h)$. Montrer que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

b. Soit $\overrightarrow{x} \in E$. Montrer que $\overrightarrow{x} = \frac{1}{4}h\left(\overrightarrow{x}\right) - \frac{1}{4}g\left(\overrightarrow{x}\right)$.

c. Déduire de ces deux questions $\mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Ker}(h) = E$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 3748

1. Soit $\overrightarrow{x} \in E$. On a donc :

$$\begin{aligned}
(g \circ h)\left(\overrightarrow{x}\right) &= g\left(h\left(\overrightarrow{x}\right)\right) \\
&= g\left((f + \mathrm{Id}_E)\left(\overrightarrow{x}\right)\right) \\
&= g\left(f\left(\overrightarrow{x}\right) + \overrightarrow{x}\right) \\
&= g\left(f\left(\overrightarrow{x}\right)\right) + g\left(\overrightarrow{x}\right) \\
&= (f - 3\mathrm{Id}_E)\left(f\left(\overrightarrow{x}\right)\right) + (f - 3\mathrm{Id}_E)\left(\overrightarrow{x}\right) \\
&= (f \circ f)\left(\overrightarrow{x}\right) - 3f\left(\overrightarrow{x}\right) + f\left(\overrightarrow{x}\right) - 3\overrightarrow{x} \\
&= (f \circ f)\left(\overrightarrow{x}\right) - 2f\left(\overrightarrow{x}\right) - 3\overrightarrow{x} \\
&= (f \circ f - 2f - 3\mathrm{Id}_E)\left(\overrightarrow{x}\right) \\
&= \tilde{0}\left(\overrightarrow{x}\right) \\
&= \overrightarrow{0_E}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(h \circ g)\left(\overrightarrow{x}\right) &= h\left(g\left(\overrightarrow{x}\right)\right) \\
&= h\left((f - 3\mathrm{Id}_E)\left(\overrightarrow{x}\right)\right) \\
&= h\left(f\left(\overrightarrow{x}\right) - 3\overrightarrow{x}\right) \\
&= h\left(f\left(\overrightarrow{x}\right)\right) - 3h\left(\overrightarrow{x}\right) \\
&= (f + \mathrm{Id}_E)\left(f\left(\overrightarrow{x}\right)\right) - 3(f + \\
&= (f \circ f)\left(\overrightarrow{x}\right) + f\left(\overrightarrow{x}\right) - 3f \\
&= (f \circ f)\left(\overrightarrow{x}\right) - 2f\left(\overrightarrow{x}\right) - 3\overrightarrow{x} \\
&= (f \circ f - 2f - 3\mathrm{Id}_E)\left(\overrightarrow{x}\right) \\
&= \tilde{0}\left(\overrightarrow{x}\right) \\
&= \overrightarrow{0_E}
\end{aligned}$$

Par suite, on en déduit que pour tout $\overrightarrow{x} \in E$, $(g \circ h)\left(\overrightarrow{x}\right) = (h \circ g)\left(\overrightarrow{x}\right)$ c'est à dire $g \circ h = h \circ g$ et qu'en plus ils sont tous les deux égaux à l'application nulle.

2. Soit $\overrightarrow{y} \in \mathrm{Im}(h)$. Il existe donc $\overrightarrow{x} \in E$ tel que $\overrightarrow{y} = h\left(\overrightarrow{x}\right)$.

Ainsi :
$$\begin{aligned}
g\left(\overrightarrow{y}\right) &= g\left(h\left(\overrightarrow{x}\right)\right) \\
&= (g \circ h)\left(\overrightarrow{x}\right) \\
&= \tilde{0}\left(\overrightarrow{x}\right) \\
&= \overrightarrow{0_E}
\end{aligned}$$
et par suite $\overrightarrow{y} \in \mathrm{Ker}(g)$.

On en déduit donc que $\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
Sur le même principe, on montrerait que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(h)$.

3. a. Soit $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Ker}(h)$.
Alors $g\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0_E}$ et $h\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0_E}$.
Par définition de g, on sait que $g\left(\overrightarrow{x}\right) = f\left(\overrightarrow{x}\right) - 3\overrightarrow{x}$ donc on en déduit que $3\overrightarrow{x} = f\left(\overrightarrow{x}\right)$.
Par définition de h, on sait que $h\left(\overrightarrow{x}\right) = f\left(\overrightarrow{x}\right) + \overrightarrow{x}$ donc on en déduit que $-\overrightarrow{x} = f\left(\overrightarrow{x}\right)$.
Par conséquent on en déduit que $3\overrightarrow{x} = -\overrightarrow{x}$ et donc que $4\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$ donc $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$.

b. Soit $\overrightarrow{x} \in E$. On a : $\begin{aligned}\frac{1}{4}h\left(\overrightarrow{x}\right) - \frac{1}{4}g\left(\overrightarrow{x}\right) &= \frac{1}{4}\left(f\left(\overrightarrow{x}\right) + \overrightarrow{x} - \left(f\left(\overrightarrow{x}\right) - 3\overrightarrow{x}\right)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{x} + 3\overrightarrow{x}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(4\overrightarrow{x}\right)\\ &= \overrightarrow{x}\end{aligned}$

c. On vient de montrer que $\mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Ker}\,(h) \subset \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$, l'inclusion réciproque étant évidente car il s'agit d'une intersection de deux sous-espaces. Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Ker}\,(h) = \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$ et donc la somme $\mathrm{Ker}\,(g) + \mathrm{Ker}\,(h)$ est directe.
De plus, tout vecteur $\overrightarrow{x} \in E$ s'écrit sous la forme $\overrightarrow{x} = \frac{1}{4}h\left(\overrightarrow{x}\right) - \frac{1}{4}g\left(\overrightarrow{x}\right)$.
or $g\left(\frac{1}{4}h\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = \overrightarrow{0_E}$ et $h\left(\frac{1}{4}g\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = \overrightarrow{0_E}$. Ainsi $\frac{1}{4}h\left(\overrightarrow{x}\right) \in \mathrm{Ker}\,(g)$ et $\frac{1}{4}g\left(\overrightarrow{x}\right) \in \mathrm{Ker}\,(h)$.
Par conséquent, tout vecteur de E se décompose comme combinaison linéaire d'un élément de $\mathrm{Ker}\,(g)$ et d'un élément de $\mathrm{Ker}\,(h)$, c'est à dire que $E = \mathrm{Ker}\,(g) + \mathrm{Ker}\,(h)$.
Par conséquent, on en déduit que $E = \mathrm{Ker}\,(g) \oplus \mathrm{Ker}\,(h)$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 3746

On rappelle que $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit alors $\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x 2tf(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right. \end{array}\right.$

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$? Justifier votre réponse.
2. Montrer que Ψ est une endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
3. Étudier l'injectivité et la surjectivité de Ψ. Conclure.
4. Déterminer pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ le sous-espace $\mathrm{Ker}\,\left(\Psi - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})}\right)$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 3746

1. La famille $\mathcal{F} = (x \longmapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $(\mathcal{C}, \mathbb{R}_+)\,\mathbb{R}$, qui contient une infinité de vecteurs. Si $(\mathcal{C}, \mathbb{R}_+)\,\mathbb{R}$, était de dimension finie n, toutes ses familles libres possèderaient au plus n vecteurs. Or $\mathcal{F}$ contient une infinité de vecteurs, et ainsi $(\mathcal{C}, \mathbb{R}_+)\,\mathbb{R}$, ne peut pas être de dimension finie.
2. Soient $(f_1, f_2) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $f_3 = \lambda f_1 + f_2$.
Par définition de Ψ, on a : $\Psi(f_3) : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x 2tf_3(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$
Or par construction : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\quad f_3(t) = \lambda f_1(t) + f_2(t)$ dont on en déduit que : $\Psi(f_3) : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x 2t\left(\lambda f_1(t) + f_2(t)\right)\mathrm{d}t \end{array}\right.$ et par linéairité de l'intégrale que : $\Psi(f_3) : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda\displaystyle\int_0^x 2tf_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x 2tf_2(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$ c'est à dire $\Psi(f_3) : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda\Psi(f_1)(x) + \Psi(f_2)(x) \end{array}\right.$.
Ainsi, il vient que $\Psi(f_3) = \lambda\Psi(f_1) + \Psi(f_2)$. Par conséquent Ψ est linéaire.
De plus comme $\Psi : \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, Ψ est un endomorphisme.
3. **Étude de l'injectivité de Ψ :** on a donc : $(f \in \mathrm{Ker}\,(\Psi)) \quad\Leftrightarrow\quad \left(\Psi(f) = \tilde{0}\right)$.
Par conséquent $\Psi(f)' = \tilde{0}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Or $\Psi(f): \begin{array}{|lll} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda \displaystyle\int_0^x 2tf(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\Psi(f)'(x) = 2xf(x)$.

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 0$ et comme f est continue en 0, cette relation est encore vraie pour $x = 0$.

Par suite, $f = \tilde{0}$ sur $\mathbb{R}_+$ et donc Ψ est injective.

Étude de la surjectivité de Ψ : Ψ ne peut pas être surjective. En effet, si c'était le cas, pour tout fonction $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ il existerait $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $g = \Psi(f)$. Donc g serait en particulier dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Ce qui ne fonctionnerait pas si l'on choisissait $g = \sqrt{\bullet}$.

Donc Ψ n'est pas surjective.

Par suite, Ψ est une application injective qui n'est pas surjective.

4. Le cas $\lambda = 0$ a été étudié lors de l'injectivité. On suppose donc ici que $\lambda \neq 0$.
Soit $f \in \operatorname{Ker}(\Psi - \lambda \mathrm{Id}_E)$. On a donc : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \Psi(f)(x) = \lambda f(x)$.
Donc en dérivant, il vient que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $2xf(x) = \lambda f'(x)$.
f étant solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, on trouve que $f : x \longmapsto K\mathrm{e}^{\frac{x^2}{\lambda}}$ où $K \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, toute fonction de la forme $f : x \longmapsto K\mathrm{e}^{\frac{x^2}{\lambda}}$ où $K \in \mathbb{R}$ est telle que $\displaystyle\int_0^x 2tf(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En conclusion, $\operatorname{Ker}\left(\Psi - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})}\right) = \operatorname{Vect}\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\right)$.

EX. 4 | Réf. 3747

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ab} \\ a & 1 & \frac{1}{b} \\ ab & b & 1 \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \times b \neq 0$.

Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 3747

Puisque par hypothèse $a \times b \neq 0$, nécessairement a et b sont non nuls.
Un échelonnement en colonnes de la matrice A donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ab} \\ a & 1 & \frac{1}{b} \\ ab & b & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - \frac{1}{a}C_1 \text{ avec } a \neq 0 \\ C_3 \leftarrow C_3 - \frac{1}{ab}C_1 \text{ avec } ab \neq 0}}{\sim_C} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par suite, on en déduit que le rang de la matrice A est égal à 1. Or $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(f)$ c'est à dire que $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 1$ et que $\operatorname{Im}(f)$ est une droite vectorielle.
D'après le théorème du rang, puisque $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$, il vient que $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 2$.
Par construction de la matrice A, on a que $(1, a, ab) \in \operatorname{Im}(f)$ et qu'il est non nul, donc $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}((1, a, ab))$.
En notant $\left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_3}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, d'après l'échelonnement précédent, il vient que : $\overrightarrow{e_2} - \frac{1}{a}\overrightarrow{e_1} \in \operatorname{Ker}(f)$ et $\overrightarrow{e_3} - \frac{1}{ab}\overrightarrow{e_1} \in \operatorname{Ker}(f)$ et que ces deux vecteurs sont non nuls et non colinéaires. Ils forment donc une famille libre de 2 vecteurs d'un espace de dimension 2. Par théorème, ils en forment une base et par suite $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\left(-\frac{1}{a}, 1, 0\right), \left(-\frac{1}{ab}, 0, 1\right)\right)$.

EX. 5 | Réf. 3749

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Calculer A^2 et A^3.

b. En déduire A^n pour tout entier n supérieur ou égal à 3.

2. Dans cette question $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice qui commute avec la matrice A, c'est à dire que vérifie la relation $AM = MA$.
   On pose $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$
   - **a.** Montrer que les matrices qui commutent avec A sont de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ c'est à dire $M = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2$.
   - **b.** En déduire que l'on a $M^2 = a^2\mathrm{I}_3 + 2abA + \left(b^2 + 2ac\right) A^2$.
     Écrire explicitement la matrice M^2 en fonction de a, b et c.
3. On se propose de montrer qu'il n'existe aucune matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = A$.
   - **a.** Montrer que si une telle matrice N existait, alors elle vérifierait $AN = NA$.
   - **b.** En déduire qu'il n'existe pas de matrice N telle que $N^2 = A$.
4. L'objectif de cette question est de trouver les matrices $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $PA = P - A$.
   - **a.** Justifier que la matrice $\mathrm{I}_3 - A$ est inversible.
   - **b.** Développer le produit $(\mathrm{I}_3 - A)\left(\mathrm{I}_3 + A + A^2\right)$ et en déduire l'inverse de la matrice $\mathrm{I}_3 - A$ en fonction de I_3, A et A^2.
   - **c.** Soit P une matrice vérifiant $PA = P - A$.
     Montrer que : $P = A\left(\mathrm{I}_3 - A\right)^{-1}$ et en déduire l'expression de P en fonction de A et A^2.

EX. 5 | Éléments de correction | Réf. 3749

1. **a.** On obtient directement que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   b. Puisque $A^3 = (0)$, il vient que $A^n = (0)$ pour tout $n \geq 3$.

2. **a.** On a tout d'abord que : $AM = \begin{pmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & u & v \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$.

Ainsi par identification des coefficients des matrices AM et MA :

$$\begin{aligned}(M \text{ commute avec } A) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u=0 \\ v=a \\ w=b \\ x=0 \\ u=y \\ z=v \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(M = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right)\end{aligned}$$

b. On en déduit directement que :
$$\begin{aligned} M^2 &= \left(a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2\right)\left(a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2\right) \\ &= a^2\mathrm{I}_3^2 + ab\mathrm{I}_3A + acA^2 + abA\mathrm{I}_3 + b^2A^2 + bc\underbrace{A^3}_{=(0)} + acA^2\mathrm{I}_3 + bc\underbrace{A^3}_{=(0)} + c^2\underbrace{A^4}_{=(0)} \\ &= a^2\mathrm{I}_3 + acA^2 + abA + abA + b^2A^2 + acA^2 \\ &= a^2\mathrm{I}_3 + 2abA + \left(b^2+ac\right)A^2 \end{aligned}$$

ce qui donne ensuite $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 2ac+b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$

3. a. Supposons que N soit une matrice telle que $N^2 = A$.
On aurait donc que $N^2 \times N = A \times N$ et $N \times N^2 = N \times A$, c'est à dire que $N^3 = AN$ et $N^3 = NA$ ce qui donne que $AN = NA$.

b. Si il existait une matrice N telle que $N^2 = A$, d'après la question précédente, elle commuterait avec A. Ainsi, N serait de la forme $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. D'après la question précédente, on en déduirait que $N^2 = a^2\mathrm{I}_3 + 2abA + \left(b^2+ac\right)A^2$ donc par identification avec la matrice A que $\begin{cases} a^2 = 0 \\ 2ab = 1 \\ b^2 + ac = 1 \end{cases}$ ce qui en impossible car : $a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$ et dans ce cas $2ab \neq 1$.
Par suite, il n'existe pas de matrice N telle que $N^2 = A$.

4. a. On a directement que $\mathrm{I}_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont non nuls et par conséquent, la matrice $\mathrm{I}_3 - A$ est inversible.

b. Il vient directement que :
$$\begin{aligned} (\mathrm{I}_3 - A)\left(\mathrm{I}_3 + A + A^2\right) &= \mathrm{I}_3^2 + A + A^2 - A\mathrm{I}_3 - A^2 - \underbrace{A^3}_{=(0)} \\ &= \mathrm{I}_3 + 1 + A^2 - A - A^2 \\ &= \mathrm{I}_3 \end{aligned}$$

Par conséquent la matrice $\mathrm{I}_3 + A + A^2$ est l'inverse de la matrice $\mathrm{I}_3 - A$.

c. Soit P telle que $PA = P - A$. Il vient alors que :
$$\begin{aligned} (PA = P - A) \quad &\Leftrightarrow \quad (PA - P = 1) \\ &\Leftrightarrow \quad P(A - \mathrm{I}_3) = -A \\ &\Leftrightarrow \quad (P(\mathrm{I}_3 - A) = A) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(P = A(\mathrm{I}_3 - A)^{-1}\right) \end{aligned}$$
ce qui donne done que $A = A\left(\mathrm{I}_3 + A + A^2\right)$ ce qui donne après développement que $P = A + A^2$.