À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [3170] | 1| Famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où l'on a :

$$u_1 = (1,3,2,1) \quad u_2 = (2,-1,-1,4) \quad u_3 = (2,-1,-1,4) \quad u_4 = (3,2,1,5)$$

Étudier le caractère libre et générateur de la famille $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Éléments de correction

Puisque $\mathcal{F}$ est une famille de 4 vecteurs, par théorème elle est libre, si et seulement si, le rang de la matrice de la famille de vecteur est égal à 4.
Puisque $\mathcal{F}$ est une famille de $\mathbb{R}^4$, par théorème elle est génératrice, si et seulement si, le rang de la matrice de la famille de vecteur est égal à 4.

La matrice de cette famille de vecteurs est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, que l'échelonne, par l'algorithme de Gauss, afin de déterminer le rang de cette dernière :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{7}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{2}{7}L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a 2 pivots non nuls. La matrice de cette famille de vecteurs est donc de 2.
Par suite, la famille $\mathcal{F}$ n'est ni libre, ni génératrice.

Exercice| [3222] | 2| Combinaison linéaire de vecteurs

Vérifier que la famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est liée, puis déterminer une relation de dépendance entre les vecteurs de cette famille :

$$u_1 = (1,-1,1,2)\,, u_2 = (-1,-2,1,1)\,, \quad u_3 = (-1,-8,5,7) \text{ et } u_4 = (1,5,-3,-4)$$

Éléments de correction

Étude du caractère lié : Puisque $\mathcal{F}$ est une famille de 4 vecteurs, par théorème elle est libre, si et seulement si, le rang de la matrice de la famille de vecteur est égal à 4.

La matrice de cette famille de vecteurs est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -8 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 7 & -4 \end{pmatrix}$, que l'échelonne, par l'algorithme de Gauss, afin de déterminer le rang de cette dernière :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -8 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a 2 pivots non nuls. La matrice de cette famille de vecteurs est donc de 2, et par suite la famille $\mathcal{F}$ est bien liée.

Recherche d'une relation de dépendance : On cherche donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4)$ tels que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4) \neq (0,0,0,0)$ et : $(\star) : \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \lambda_3.u_3 + \lambda_4.u_4 = \overrightarrow{0}$

La relation $(\star)$ vérifiée par $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4)$ montre que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4)$ est solution du système homogène de représentation matricielle $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -8 & 5 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right)$ pour lequel en reprenant les opérations réalisées pour étudier la liberté de la famille $\mathcal{F}$, on a directement :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -8 & 5 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On poursuit alors l'échelonnement :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit alors les relations : $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & -2\lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_2 & = & -3\lambda_3 + 2\lambda_4 \end{array}\right.$ avec $(\lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^2$.

La relation $(\star)$ devient ainsi : $(-2\lambda_3 + \lambda_4).u_1 + (-3\lambda_3 + 2\lambda_4).u_2 + \lambda_3.u_3 + \lambda_4.u_4 = \overrightarrow{0}$ pour $(\lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^2$.

Et en particulier, pour $\lambda_3 = 1$ et $\lambda_4 = 1$, il vient : $-u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = \overrightarrow{0}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [2076] | 3| Sommes téléscopiques

On se propose dans cet exercice de calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

(1). Vérifier par le calcul que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $1 + \dfrac{2}{k(k+3)} = \dfrac{k^2+3k+2}{k(k+3)}$.

(2). Factoriser le polynôme $k^2 + 3k + 2$.

(3). Exprimer sous forme d'une somme $\ln\left(1 + \dfrac{2}{k(k+3)}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On pourra utiliser la factorisation du polynôme $k^2 + 3k + 2$.

(4). Calculer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right)$.

On pourra faire apparaître un téléscopage de termes.

Éléments de correction

(1). On réduit au même dénominateur l'expression $1 + \dfrac{2}{k(k+3)}$ pour se ramener à l'expression proposée. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} 1+\frac{2}{k(k+3)} &= \frac{k(k+3)+2}{k(k+3)} \\ &= \frac{k^2+3k+2}{k(k+3)} \end{aligned}$$

(2). Le polynôme k^2+3k+2 en k a pour discriminant $\Delta = 3^2 - 4\times 1 \times 2 = 1$ donc possède deux racines $k_1 = -1$ et $k_2 = -2$. Par suite, on en déduit que : $k^2+3k+2 = (k+1)(k+2)$.

(3). Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right) &= \ln\left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\right) \\ &= \ln(k+1)+\ln(k+2)-\ln(k)-\ln(k+3) \end{aligned}$$

(4). On en déduit ainsi que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1)+\ln(k+2)-\ln(k)-\ln(k+3)\right) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)}_{\substack{\textbf{Changement d'indice}\\ j=k+1}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\ln(k+2)}_{\substack{\textbf{Changement d'indice}\\ \ell=k+2}} - \sum_{k=1}^{n}\ln(k) - \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\ln(k+3)}_{\substack{\textbf{Changement d'indice}\\ h=k+3}} \\ &= \sum_{j=2}^{n+1}\ln(j)+\sum_{\ell=3}^{n+2}\ln(\ell)-\sum_{k=1}^{n}\ln(k)-\sum_{h=4}^{n+3}\ln(h) \\ &\quad \text{et on redonne le même nom aux indices de sommation} \\ &= \sum_{k=2}^{n+1}\ln(k)+\sum_{k=3}^{n+2}\ln(k)-\sum_{k=1}^{n}\ln(k)-\sum_{k=4}^{n+3}\ln(k) \\ &\quad \text{la plage commune de sommation est l'intervalle d'entiers } [\![4;n]\!] \\ &= \left(\ln(2)+\ln(3)+\sum_{k=4}^{n}\ln(k)+\ln(n+1)\right)+\left(\ln(3)+\sum_{k=4}^{n}\ln(k)+\ln(n+1)+\ln(n+2)\right) \\ &\qquad -\left(\ln(1)+\ln(2)+\ln(3)+\sum_{k=4}^{n}\ln(k)\right)-\left(\sum_{k=4}^{n}\ln(k)+\ln(n+1)+\ln(n+2)+\ln(n+3\right. \\ &= \ln(2)+\ln(3)+\ln(n+1)+\ln(3)+\ln(n+1)+\ln(n+2)-\ln(1)-\ln(2)-\ln 3-\ln(n+ \\ &= \ln(3)+\ln(n+1)-\ln(n+3) \end{aligned}$$