Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 0172

Dans tout cet exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et A un matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$, et on note alors par $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On désigne par f l'application définie par : $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & ({}^tA)\,M + MA \end{array}\right.$

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. **a.** Soit M un matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f(M)$ est encore une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   b. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. Pour tout la suite, on se place dans le cas où $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   On considère par ailleurs les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
   b. Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
   c. Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$ puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement.
   d. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.
   e. Déterminer alors la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 0639

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ où e_i est le $n-$uplet de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont nulles, sauf la i^{e} qui vaut 1.

On considère alors un vecteur $v = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$.

On désigne par ailleurs par f l'application donnée par : $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x - \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v \end{array}\right.$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $f \circ f = f$.
3. **a.** Montrer que : $(y \in \mathrm{Im}(f)) \quad \Leftrightarrow \quad (f(y) = y)$.
   b. Montrer que la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est inférieure ou égale à $n-1$.
   c. Montrer que : $\forall i \in [\![1; n-1]\!],\ (e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)$.
   d. En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. Quel est alors le rang de f ?
4. Déterminer une base du noyau de f.