Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 0172

Dans tout cet exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et A un matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$, et on note alors par $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On désigne par f l'application définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & ({}^tA)\,M + MA \end{array} \right.$

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. **a.** Soit M un matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f(M)$ est encore une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   b. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. Pour tout la suite, on se place dans le cas où $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   On considère par ailleurs les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
   b. Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
   c. Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$ puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement.
   d. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.
   e. Déterminer alors la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0172

1. Il faudra en particulier mobiliser les propriétés opératoires de la transposition.
2. **a.** La remarque vaut là encore...
   b. La remarque vaut encore ici, mais on fera attention à une particularité que doit avoir une application linéaire pour être appelée endomorphisme.
3. **a.** On traduira le caractère antisymétrique d'une matrice par des relations sur ses coefficients.
   b. On établira la liberté de la famille en revenant à la définition d'une famille libre.
   c. C'est un calcul direct...
   d. On connaît une famille génératrice de l'image...
   e. Le théorème du rang nous servira ici pour déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 0639

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ où e_i est le $n-$uplet de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont nulles, sauf la i^{e} qui vaut 1.

On considère alors un vecteur $v = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$.

On désigne par ailleurs par f l'application donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v \end{array} \right.$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $f \circ f = f$.
3. **a.** Montrer que : $(y \in \mathrm{Im}\,(f)) \quad \Leftrightarrow \quad (f(y) = y)$.
   b. Montrer que la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$ est inférieure ou égale à $n-1$.
   c. Montrer que : $\forall i \in [\![1; n-1]\!]\,,\ (e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}\,(f)$.
   d. En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$. Quel est alors le rang de f ?
4. Déterminer une base du noyau de f.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0639

1. On s'intéressera donc à l'image d'une combinaison linéaire pour assurer le caractère linéaire.
2. Il s'agira de montrer que $f(f(x)) = f(x)$ et on pensera à utiliser la linéarité de f.
3. **a.** On exploitera la question précédente dans un raisonnement par double implication et en revenant à la définition des objets.
   b. On exploitera la question précédente en mettant en place la recherche d'une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$ en utilisant le fait que $v \neq \overrightarrow{0}$ et en s'arrêtant dès que l'on peut en déduire une information sur la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$.
   c. On effectuera le calcul $f\,(e_i - e_{i+1})$ pour constater que cela vaut $e_i - e_{i+1}$ et conclure avec une des questions précédentes.
   d. On étudiera la liberté de la famille précédente en utilisant le fait que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ intervient et on discutera sur la valeur possible de la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$ pour en récupérer le caractère base.
4. On connaît déjà un vecteur du noyau et le théorème du rang en donne la dimension.