Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1| Réf. 5450

Soient $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ JMJ = M\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une famille génératrice de F.

3. Déduire des questions précédentes la dimension de F.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2| Réf. 5451

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. On considère l'ensemble $R = \big\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ M^2 + \mathrm{I}_3 = A\big\}$.
L'ensemble R est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

2. Calculer $(A - 2\mathrm{I}_3)^2$ puis en déduire que $(A - 2\mathrm{I}_3)^3 = (0)$.

3. Montrer que l'ensemble $E = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = 2X\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

4. Déterminer une famille génératrice de E.

5. Dans tout ce qui suit U et V désignent les deux matrices colonnes $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **a.** Vérifier que $AV \in \mathrm{Vect}\,(U, V)$.
- **b.** Résoudre l'équation $AX = 2X + V$ d'inconnue la matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- **c.** Posons $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.