Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5450

Soient $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ JMJ = M\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une famille génératrice de F.
3. Déduire des questions précédentes la dimension de F.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5450

1. On s'assurera notamment que F est stable par combinaison linéaire.
2. On interprètera la définition d'appartenance à F sous forme d'équations qui permettront de décrire les éléments de F sous forme de combinaison linéaire de matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Il suffit de récupérer un caractère libre pour la famille précédente...

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5451

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. On considère l'ensemble $R = \left\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ M^2 + \mathrm{I}_3 = A\right\}$.
   L'ensemble R est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
2. Calculer $(A - 2\mathrm{I}_3)^2$ puis en déduire que $(A - 2\mathrm{I}_3)^3 = (0)$.
3. Montrer que l'ensemble $E = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = 2X\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. Déterminer une famille génératrice de E.
5. Dans tout ce qui suit U et V désignent les deux matrices colonnes $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   - **a.** Vérifier que $AV \in \mathrm{Vect}\ (U, V)$.
   - **b.** Résoudre l'équation $AX = 2X + V$ d'inconnue la matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   - **c.** Posons $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5451

1. On cherchera à mettre en défaut un des éléments nécessaires pour obtenir la structure de sous-espace vectoriel.
2. C'est un simple calcul...
3. On s'assurera notamment que E est stable par combinaison linéaire.
4. On interprètera la définition d'appartenance à E sous forme d'équations qui permettront de décrire les éléments de

E sous forme de combinaison linéaire de matrices de $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$.

5. **a.** On commencera par expliciter $AV\ldots$

b. On traduira le problème en la résolution d'un système 3×3.

c. Il s'agira de récupérer un des deux caractères libre ou générateur et de mobiliser le théorème adéquat.