Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5450

Soient $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ JMJ = M\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une famille génératrice de F.
3. Déduire des questions précédentes la dimension de F.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 5450

1. **$F \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:** par construction de F

   Le vecteur nul de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ appartient à F : en effet, $J \times (0) \times J = (0)$

   F est stable par combinaison linéaire : soient $\begin{cases} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ M_1 & \in & F \\ M_2 & \in & F \end{cases}$. Posons $M_3 = \lambda M_1 + M2$ et montrons que $M_3 \in F$ c'est à dire que $JM_3J = M_3$.

   Un calcul direct donne que :
   $$\begin{aligned} JM_3J &= J\left(\lambda M_1 + M2\right)J \\ &= \lambda \underbrace{JM_1J}_{=M_1 \text{ car } M_1 \in F} + \underbrace{JM_2J}_{=M_2 \text{ car } M_2 \in F} \\ &= \lambda M_1 + M_2 \\ &= M_3 \end{aligned}$$
   et donc que $M_3 \in F$.

2. Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, un calcul direct donne que $JMJ = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ et il vient alors que :
   $$\begin{aligned} (M \in F) &\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a & = d \\ b & = c \\ c & = c \\ d & = d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \left(M \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\right) \end{aligned}$$
   et par suite $F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

3. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille de deux vecteurs non nuls et non colinéaires, donc c'est une famille libre.
   Comme elle est génératrice de F, elle en forme donc une base.
   C'est donc une famille base de F consituée de deux vecteurs, donc par définition F est de dimension 2.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5451

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. On considère l'ensemble $R = \left\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ M^2 + \mathrm{I}_3 = A\right\}$.
L'ensemble R est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

2. Calculer $(A - 2\mathrm{I}_3)^2$ puis en déduire que $(A - 2\mathrm{I}_3)^3 = (0)$.

3. Montrer que l'ensemble $E = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = 2X\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

4. Déterminer une famille génératrice de E.

5. Dans tout ce qui suit U et V désignent les deux matrices colonnes $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que $AV \in \mathrm{Vect}\ (U, V)$.

b. Résoudre l'équation $AX = 2X + V$ d'inconnue la matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

c. Posons $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5451

1. R ne peut pas être un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ puisque le vecteur nul de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, à savoir la matrice nulle, n'appartient pas à R puisqu'il est clair que $(0)^2 + \mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_3$ et que $\mathrm{I}_3 \neq A$.

2. Un calcul direct donne que $A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ puis que $(A - 2\mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis il vient que $(A - 2\mathrm{I}_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. **$E \subset \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:** par construction de E

Le vecteur nul de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ appartient à E : en effet, on a que $A \times (0) = (0)$ et que $2 \times (0) = (0)$ ce qui assure que $A(0) = 2(0)$.

E est stable par combinaison linéaire : soient $\begin{cases} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ X_1 & \in & E \\ X_2 & \in & E \end{cases}$ et posons $X_3 = \lambda X_1 + X_2$. Montrons que $X_3 \in E$, c'est à dire que $AX_3 = 2X_3$.

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} AX_3 &= A\left(\lambda X_1 + X_2\right) \\ &= \lambda \underbrace{AX_1}_{=X_1 \text{ car } X_1 \in F} + \underbrace{AX_2}_{=2X_2 \text{ car } X_2 \in F} \\ &= \lambda \times 2X_1 + 2X_2 \\ &= 2\left(\lambda X_1 + X_2\right) \\ &= AX_3 \end{aligned}$$

et donc $X_3 \in E$.

4. On a directement que :

$$\begin{aligned}\left(X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E\right) &\Leftrightarrow (AX=2X)\\ &\Leftrightarrow ((A-2\mathrm{I}_3)\,X=(0))\\ &\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix}-x-y\\z\\-x-y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}-x-y=0\\ z=0\\ -x-y+z=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=-y\\ y=y\\ z=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \left(X\in\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\right)\end{aligned}$$

et par suite $E=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ et il s'agit donc d'une droite vectorielle.

5. a. Un calcul direct donne que $AV=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et il est immédiat que $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=U+2V$ ce qui assure que $AV\in\mathrm{Vect}\,(U,V)$.

b. Il est immédiat que : $(AX=2X+V) \Leftrightarrow ((A-2\mathrm{I}_3)\,X=V)$.

Par suite, en notant $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, il vient que :

$$\begin{aligned}(AX=2X+V) &\Leftrightarrow \begin{cases}-x-y=1\\ z=0\\ -x-y+z=1\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=1-y\\ y=y\\ z=0\end{cases},\ y\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

et donc l'ensemble des solutions est $\left\{\begin{pmatrix}1-y\\y\\0\end{pmatrix},\ y\in\mathbb{R}\right\}$.

c. Étudions le caractère libre de la famille (U,V,W).
Supposons donc que l'on ait $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que :

$$(\star):\quad aU+bV+cW=(0)$$

$(\star)$ devient : $\begin{pmatrix}-a+b-c\\a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

et ainsi (a,b,c) est solution du système $\begin{cases}-a+b+c=0\\ a=0\\ b=0\end{cases}$ dont la solution est trivialement $(a,b,c)=(0,0,0)$
et par suite, la famille (U,V,W) est une famille libre.
La famille (U,V,W) est donc une famille libre de 3 vecteurs de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace de dimension 3, donc par théorème, elle en forme une base.