Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5378

On se propose dans cet exercice d'établir la convergence et de déterminer la somme de la série $\sum u_n$ où l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+2} + (n+2)\sqrt{n}}$$

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, u_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2\sqrt{n+2}}$.

2. Déduire de ce qui précède la convergence de la série $\sum u_n$ en donner sa somme.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5377

On se propose dans cet exercice d'établir la convergence et de calculer la somme de la série $\sum \dfrac{n}{2^n}$.

1. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$

puis établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k}$.

2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

3. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$ en fonction de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

4. Conclure quant à la convergence de la série $\sum \dfrac{n}{2^n}$, puis en donner sa somme.