Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5378

On se propose dans cet exercice d'établir la convergence et de déterminer la somme de la série $\sum u_n$ où l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+2}+(n+2)\sqrt{n}}$$

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2\sqrt{n+2}}$.

2. Déduire de ce qui précède la convergence de la série $\sum u_n$ en donner sa somme.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 5378

1. Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n+2}} &= \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n}\sqrt{n+2}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+2}} \times \frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+2}} \times \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} \times \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}\\
&= \frac{1}{(n+2)\sqrt{n}+n\sqrt{n+2}}\\
&= u_n
\end{aligned}$$

2. Un calcul direct donne alors que :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2\sqrt{k}} - \frac{1}{2\sqrt{k+2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)\\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n+2}}
\end{aligned}$$

Il est immédiat que $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n+2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui assure que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$, et par conséquent que la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est convergente, et on obtient alors que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5377

On se propose dans cet exercice d'établir la convergence et de calculer la somme de la série $\sum \frac{n}{2^n}$.

1. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$

puis établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k}$.

2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

3. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$ en fonction de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

4. Conclure quant à la convergence de la série $\sum \frac{n}{2^n}$, puis en donner sa somme.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5377

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le premier terme de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k}$ est clairement, nul donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$

Par ailleurs :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2^k} \underset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j}{2^{j+1}} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{j}{2^j} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{j}{2^j} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k}$$

2. Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1+1}{2^k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\end{aligned}$$

3. Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} &= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}\right) - \frac{n}{2^n}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \\ &= \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}\right) - \frac{1}{2}\frac{n}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\end{aligned}$$

ce qui conduit donc à : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = -\frac{1}{2}\frac{n}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$

et donc que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = -\frac{1}{2}\frac{n}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$

et finalement que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = -\frac{n}{2^n} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$

4. Par croissances comparées $\dfrac{n}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $\dfrac{n}{2^n} = n\mathrm{e}^{-n\ln(2)}$ et puisque $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$, on sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$ comme suite des sommes partielles d'une série géométrique convergente.

Par conséquent $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + 2 \times 1 = 2$.

Cela signifie donc que la suite des sommes partielles de la série $\sum \dfrac{n}{2^n}$ est convergente, et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.