Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question...**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5373

Dans tout cet exercice, on considère la fonction f donnée par $f : x \longmapsto \ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$.

1. Justifier que f est définie sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.

2. Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]-2;+\infty[$.

3. Étudier les variations de f sur $]-2;+\infty[$.

4. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}_0$ à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$. de f au point d'abscisse 0.

5. Démontrer que : $\forall x \in]-2;+\infty[\,,\ f(x) \leq \dfrac{1}{2}x$.
Comment interpréter graphiquement ce résultat ?

6. Dans un repère orthogonal du plan dont on choisira judicieusement l'unité graphique, construire $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{T}_0$ et ses éventuelles asymptotes.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5374

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie par : $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^{2x} \end{array}\right.$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Donner les valeurs des réels a_0, b_0, a_1 et b_1 tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (a_0x+b_0)\,\mathrm{e}^{2x} \text{ et } f'(x) = (a_1x+b_1)\,\mathrm{e}^{2x}$$

3. Démontrer par récurrence sur l'entier n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (a_nx+b_n)\,\mathrm{e}^{2x}$$

On précisera en particulier les relations entre a_{n+1}, b_{n+1}, a_n et b_n.

4. Déterminer le terme général de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie à la question précédente.

5. On considère la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \dfrac{b_n}{2^n}$.
Établir une relation de récurrence sur portant sur les termes de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis détermoiner l'expression du terme général de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite dans les questions précédentes.

6. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $f^{(n)}(x)$.